

数 学 (その1)

1 次の各問いに答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 複素数 $\xi = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ について次の問いに答えよ。ただし、 n は2以上の整数とし、 i は虚数単位とする。

(1-1) $1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \cdots + \xi^n$ の値を求めよ。

(1-2) 次の数列の和を求めよ。

① $\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n}$ ② $\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n}$

(2) 与えられたベクトル $\vec{a} \neq \vec{0}$ に対して、別のベクトル \vec{b} を取る。 \vec{b} が、 \vec{a} と垂直なベクトル \vec{c} と平行なベクトル \vec{a}_1 に分解されるとき、 \vec{c} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。

(3) 関数 $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ ($x \geq 0$) の逆関数を求めよ。その定義域も書け。

Windom

2

次の問いに答えよ。ただし、(1)(2)は答のみを解答欄に記入せよ。

公平なサイコロを1回振るごとに、偶数の目が出たら1(万円)獲得し、奇数の目が出たら1(万円)損失するという賭けを行う。所持金0でこの賭けを n 回繰り返した際の損益額の合計を Z_n (万円)とする。ただし、 $Z_0 = 0$ とする。

(1) $M_n = \max_{0 \leq i \leq n} Z_i$ とするとき、確率 $P(M_4 = k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ の値をそれぞれ求めよ。

ただし、 $\max_{0 \leq i \leq n} Z_i$ は $0 \leq i \leq n$ における Z_i の最大値を表す。

(2) $T_n = \#\{i \mid i = 0, 1, 2, \dots, n-1, (Z_i = 0 \cap Z_{i+1} = 1) \cup (Z_i = 1 \cap Z_{i+1} = 0)\}$ とするとき、確率 $P(T_4 = k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ の値をそれぞれ求めよ。ただし、 $\#A$ は集合 A の要素の個数を表す。

(3) 任意の k に対して $P(M_5 = k)$ と $P(T_5 = k)$ の間に成り立つ関係を求めよ。

Windom

数 学 (その 2)

3 次の各問いに答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 次のように数列 a_n を定める。

$$a_1 = 2016, a_2 = 2017, a_{n+2} = \frac{1 + a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1-1) a_5 を求めよ。

(1-2) a_{2017} を求めよ。

(2) 白球 5 球, 黒球 2 球が入っている袋から, 同時に 4 球を取り出し, その中に含まれる白球の個数を X とする。

(2-1) X の平均値(期待値)を求めよ。

(2-2) X の分散を求めよ。

Windom

4 次の各問いに答えよ。答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $a + b = 1$, $a^2 + b^2 = 3$ のとき $a^7 + b^7$ の値を求めよ。

(2) 次の式の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{215} \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{k^2}}$$

(3) 座標平面上の点 (x, y) が $2x^2 + xy - 5x - y^2 + 4y - 3 \geq 0$ を満たしているとき、 $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。

(4) 関数 $f(x) = x + a \cos x$ ($a > 1$) は $0 < x < 2\pi$ において極小値 1 を取る。この範囲における $f(x)$ の極大値を求めよ。

(5) 座標平面上の曲線 $9y^2 = (x+3)^3$ と y 軸とで囲まれた図形の周の長さを求めよ。

Windom