

数 学 (その1)

1 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1) x の関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ $f(x) = -x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^2 + 2x + a$ とする。ただし、 a は定数とする。
- (1-1) $g(x) < f(x)$ を満たす実数 x が区間 $-2 \leq x \leq 2$ に存在するような、定数 a の値の範囲を求めよ。
- (1-2) $g(x_1) < f(x_2)$ を満たす実数 x_1 および x_2 が区間 $-2 \leq x \leq 2$ に存在するような、定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) 白球 4 個と黒球 n 個が入った袋から同時に 2 個の球を取り出すとき、2 個の球が同色である確率を p_n とする。ただし、球はすべて同じ確率で取り出されるものとする。
- (2-1) $n = 3$ のとき、 p_n の値を求めよ。
- (2-2) $n \geq 2$ とする。このとき、 $p_n \geq \frac{1}{2}$ となる整数 n の最小値を求めよ。
- (3) $0 \leq x < 2\pi$ のとき、不等式 $\sin x + \sqrt{3} \cos x \geq \sqrt{2}$ を解け。
- (4) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。 6^{100} の桁数を求めよ。

Windom

2 正の整数 a, b の組 (a, b) の全体を

$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), \dots$

のように 1 列に並べる。ここで、2 つの組 $(a_i, b_i) (i = 1, 2)$ について、 $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ ならば (a_1, b_1) の方を先に並べ、また、 $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ ならば、 $a_1 < a_2$ のとき (a_1, b_1) の方を先に並べるものとする。次の各問に答えよ。ただし、(1) から (3) までは、答は結果のみを解答欄に記入せよ。なお、必要ならば公式

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

を使ってよい。

- (1) 組 $(5, 5)$ は初めから何番目にあるか。
- (2) m, n を正の整数とする。組 (m, n) は初めから何番目にあるか。
- (3) 初めから 200 番目にある組を求めよ。
- (4) 初めから n 番目の組が (a, b) であるとき、 $c_n = ab$ とおく。和 $c_1 + \dots + c_{200}$ を求めよ。

Windom

数 学 (その2)

3 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 空間に3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 4)$ がある。次の問に答えよ。

(1-1) \vec{OA} , \vec{OB} の内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を求めよ。

(1-2) $\cos \angle AOB$ の値を求めよ。

(1-3) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(2) $(2x^3 - \frac{1}{3x})^9$ の展開式における $\frac{1}{x}$ の係数を求めよ。

(3) 実数全体で定義された関数 $f(x) = \frac{x^4 + 5x^2 + 11}{x^2 + 2}$ の最小値を求めよ。

(4) 曲線 $y = \sqrt{2 + |4x - 2x^2|}$ と直線 $y = m(x + 3)$ が相異なる4個の交点をもつような定数 m の値の範囲を求めよ。

Windom

4 次の各問に答えよ。ただし、(1)の答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 次の問に答えよ。

(1-1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ。

(1-2) 極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3 \cdot 1}{n^2+1^2} + \frac{n+3 \cdot 2}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n+3 \cdot n}{n^2+n^2} \right)$ を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{a + \cos x} - b}{(x - \pi)^2} = \frac{1}{8}$ となるような定数 a, b を求めよ。

Windom