一般入試　数学

Ⅰ　$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものをそれぞれ1つずつ選べ．

3人の力士A，B，Cが下記巴(ともえ)戦のルールに従い相撲をとり，優勝者を決める

- 1回目の取り組みは力士AとBが対戦する．
- n を2以上の自然数として，n 回目の取り組みは，$n-1$ 回目の取り組みの勝者と，その取り組みに参加していなかった力士が対戦する．
- 2連勝した力士を優勝とし，優勝者が決定した時点で巴戦は終了とする．

1回の取り組みで，力士AがBに勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$，BがCに勝つ確率は p，CがAに勝つ確率は $1-p$ であり，相撲の勝負に引き分けはないものとして，以下の問いに答えよ．

(a)　3回目の取り組み終了時点で優勝者が決まらない場合，4回目の取り組みは $\boxed{\text{ア}}$ である．6回目の取り組みで力士Cが優勝する確率は，$p=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキク}}}$ をとる．何回かの取り組みを行って力士Aが優勝する確率を α，力士Bが優勝する確率を β とすると $\boxed{\text{ケ}}$．

(b)　$p=\dfrac{1}{3}$ のとき，3回目の取り組みで力士Cが優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり，何回かの取り組みを行って力士Cが優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ となる．

(c)　3人の力士が優勝する確率が等しくなるのは $p=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}-\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ のときである．

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

① 必ず力士AとBの対戦　② 必ず力士BとCの対戦　③ 必ず力士AとCの対戦
④ 力士Aが参加するが対戦相手は不定　⑤ 力士Bが参加するが対戦相手は不定
⑥ 力士Cが参加するが対戦相手は不定　⑦ どの力士同士の対戦となるか不定

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

① $\alpha<\beta$ が成り立つ　② $\alpha=\beta$ が成り立つ　③ $\alpha>\beta$ が成り立つ
④ $\alpha\leqq\beta$ が成り立つ　⑤ $\alpha\geqq\beta$ が成り立つ　⑥ $\alpha\neq\beta$ が成り立つ
⑦ p の値によって α，β の大小関係が変化する

Ⅱ　座標空間において，点 C(0 , 0 , 1)を中心とする半径 1 の球面を S，点 A(1 , 0 , 3)から球面 S に引いた接線の接点を P(x，y，z)，接線と xy 平面との交点を Q(X，Y，0)とする．

(a)　点 P は球面 S 上にあるので $x^2+y^2+\left(z-\boxed{\text{ア}}\right)^2=\boxed{\text{イ}}$ を満たし，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{ウ}}$ であるので，次式が成り立つ．

$$x+\boxed{\text{エ}}\,z=\boxed{\text{オ}} \qquad\qquad \cdots\cdots(*)$$

この式は平面を表す．この式が表す平面と球面 S との交線は，点 $\left(\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \boxed{\text{ク}},\ \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ の円になる．また，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\boxed{\text{セ}} \qquad\qquad \cdots\cdots(**)$$

が成り立つ．

(b)　点 Q は直線 AP 上にあるため，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を満たす実数 k が存在するが，式(＊)よりこの実数 k は

$$k=\frac{\boxed{\text{ソ}}-X}{\boxed{\text{タ}}}$$

と表されることがわかる．これと式(＊＊)より，点 Q の座標に対して次式が成立する．

$$X^2+\boxed{\text{チ}}\,X+\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\,Y^2=\boxed{\text{ト}}$$

この式が表す xy 平面上の楕円の焦点は，原点と点 $\left(\boxed{\text{ナニ}},\ \boxed{\text{ヌ}},\ 0\right)$ である．

III　三角関数の極限に関する以下の問いに答えよ．

(1)　定数 k に対して，極限

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3\theta + k\cos 2\theta}{4\cos^2\frac{\theta}{2} - 3}$$

が有限の値となるのは $k = \boxed{\text{アイ}}$ のときであり，このとき極限値は $\boxed{\text{ウエ}}$ である．

(2)　正の実数 x に対して，下記極限で定義される関数を $f(x)$ とする

$$f(x) = \lim_{\alpha \to 2} \frac{\cos \alpha x - \cos 2x}{\alpha^2 + \alpha - 6}$$

このとき，関数 $f(x)$ は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi,\quad \lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$

を満たす．

また，$x > 0$ の範囲で $y = f(x)$ のグラフが直線 $y = ax + b$ と共有点を持たないのは，

$a > \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ かつ $b > \boxed{\text{ツ}}$ を満たすとき，または $a < \dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ かつ $b < \boxed{\text{ニ}}$

を満たすときである．

Ⅳ　座標平面上を運動する点P$(x,\ y)$の座標が，時刻tにおいて

$$x = -\sqrt{3}\,t^2 + 2\sqrt{3}\,t, \qquad y = t^3 - 3t^2 + 2t$$

であり，時刻tが$0 \leqq t \leqq 1$の範囲で変化したときの点Pの軌跡を曲線Cとする

(a)　点Pのy座標は$t = \dfrac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$のとき最大値$\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$をとる．また，$0 < t < 1$のとき，点Pにおける曲線Cの接線と$x$軸とのなす鋭角が$\dfrac{\pi}{6}$となるのは$t = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$のときである．

(b)　時刻tにおける点Pの速さは$\boxed{\text{ケ}}\,t^2 - \boxed{\text{コ}}\,t + \boxed{\text{サ}}$と表される．また，曲線Cの長さは$\boxed{\text{シ}}$である．

(c)　曲線Cとx軸で囲まれた図形の面積は$\dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$である．