

数 学

平成 29 年 度

入 学 試 験 問 題

受 験 号	
-------	--

1. 注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- (2) この問題冊子は 14 ページあります。
試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、手を挙げて、監督者に知らせてください。
- (3) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。
- (4) 解答用紙には、氏名、受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があります。それぞれに正しく記入し、マークしてください。
- (5) 問題冊子のどのページも切り離してはいけません。
- (6) 計算機能や辞書機能、通信機能などをもつ機器等の使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。
- (7) 試験終了後、解答用紙はもちろん、問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解答上の注意

解答上の注意は、裏表紙にも記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読んでください。ただし、冊子を開いてはいけません。また、解答用紙の左下に記載してある「注意事項」も読んでください。

- (1) 問題は **1** , **2** , **3** の 3 つの大問があります。
- (2) 各問題文中の **ア** , **イウ** などの **□** には、数値または符号 (+ , -) が入ります。これらを次の方法で、解答用紙の指定欄に、解答してください。

裏表紙につづく

解答を始めるまえに、つぎの解答上の注意のつづきを読んでください。

解答上の注意のつづき

(i) 分数の形の解答枠に、整数の解答をしたいときは、分母が 1 の分数の

形になるように答えてください。たとえば、 $\frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは、 $\frac{2}{1}$ と答えてください。

(ii) 解答枠 $\boxed{\quad}$ に、解答枠の桁数より少ない桁数の整数を解答したいときは、数字が右づめで、その前を 0 でうめるような形で答えてください。たとえば、 $\boxed{\text{ヨワ}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは、02 と答えてください。ヨの 0 をマークしないままにしておくと、間違いになります！

(解答上の注意終)

1 θ を実数とし、 i を虚数単位とする。

(1) A, B を実数の定数とし、任意の実数 θ に対して、

$$\sin 3\theta = \sin \theta \cdot (A - B \sin^2 \theta)$$

が成り立つとする。

(i) $A = \boxed{\text{ア}}$, $B = \boxed{\text{イ}}$ である。

(ii) $\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ とし、3次方程式 $Ax - Bx^3 = \frac{1}{2}$ の最も小

さい解が $\sin \theta$ に等しいとき、 $\theta = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}\pi$ である。

(2) a, b, c を実数の定数とし、任意の実数 θ に対して、

$$\sin 5\theta = \sin \theta \cdot f(\sin^2 \theta)$$

を満たす 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。

(i) 複素数 $\left(\cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi\right)^5$ の虚部の値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(ii) a, β を実数とすると、複素数 $(a + i\beta)^5$ の虚部は

$$\boxed{\text{ク}} a^4\beta - \boxed{\text{ケコ}} a^2\beta^3 + \beta^5$$

に等しい。

(iii) $a = \boxed{\text{サシ}}$, $b = -\boxed{\text{スセ}}$, $c = \boxed{\text{ソ}}$ である。

(iv) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の解 x は

$$x = \frac{\boxed{\text{タ}} - \sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}} \quad \text{と} \quad x = \frac{\boxed{\text{タ}} + \sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。ここで、2つの $\boxed{\text{タ}}$, 2つの $\boxed{\text{チ}}$, 2つの $\boxed{\text{ツ}}$ は、それぞれ、同じ値である。

(v) $\cos \frac{2}{5}\pi = \frac{-\boxed{\text{テ}} \boxed{\text{ト}} \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

ただし、 $\boxed{\text{ト}}$ は、符号 +, - のいずれかである。

(3) p, q, r, s を実数の定数とし、任意の実数 θ に対して、

$$\sin 7\theta = \sin \theta \cdot g(\sin^2 \theta)$$

を満たす 3 次関数 $g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ を考える。

(i) $p = -\boxed{\text{ヌネ}}$, $q = \boxed{\text{ノハヒ}}$, $r = -\boxed{\text{フヘ}}$, $s = \boxed{\text{ホ}}$ である。

(ii) $\sin \frac{2}{7}\pi \cdot \sin \frac{4}{7}\pi \cdot \sin \frac{6}{7}\pi = \frac{\sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ が成り立つ。

2 θ を実数とし、 i を虚数単位とする。

(1) 複素数平面において、複素数 z が $2 + \frac{3}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ の円周上にあるとし、 $w = \frac{1}{z}$ とおく。

(i) $\left| 2 + \frac{3}{2}i \right| = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

(ii) $\left| w - \frac{\text{ウ} - \text{エ}i}{\text{オカ}} \right| = \sqrt{2}|w|$ が成り立つ。

(iii) w は中心 $-\frac{\text{キ}}{\text{クケ}} + \frac{\text{コ}}{\text{サン}}i$ 、半径 $\frac{\text{ス}}{\text{セ}}\sqrt{2}$ の円周上にある。

(2) 複素数平面において

$$z_A = \cos \theta + i \sin \theta, z_B = \cos 2\theta + i \sin 2\theta, z_C = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

とし、複素数 z_A, z_B, z_C の表す点を、それぞれ、A, B, C とする。

(i) $\pi < \theta < 2\pi$ とする。3点 A, B, C を頂点とする三角形が正三角形

となるのは $\theta = \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}\pi$ のときであり、直角三角形になるのは

$\theta = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}\pi$ のときである。

(ii) $0 < \theta < \pi$ とする。3点 A, B, C を頂点とする三角形の面積を S とするとき,

$$S = \sin \theta \boxed{\text{テ}} \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \sin 2\theta$$

である。ただし、 $\boxed{\text{テ}}$ は符号 +, - のいずれかである。

$$S \text{ が最大となるのは } \theta = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \pi \text{ のときである。}$$

$$\text{このとき } S \text{ の最大値は } \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}} \text{ である。}$$

(iii) $\theta = 1$ とし、 m, n を整数とする。 m, n が $\arg(z_A) = \arg\left(\frac{z_B^m}{z_C^n}\right)$ を満たすとき、 m, n は、整数 k を用いて

$$m = 2 + \boxed{\text{ヒ}} k, \quad n = \boxed{\text{フ}} + \boxed{\text{ヘ}} k$$

と表せる。このうち、 m, n が共に 50 以上、150 以下を満たす m, n の組は $\boxed{\text{ホマ}}$ 組ある。

3 $f(x) = x + \frac{2}{\pi} \sin(\pi x)$ とする。

(1) $0 \leq x \leq 1$ の範囲において、 $f(x)$ は $x = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ のとき最大値

$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}} + \frac{\sqrt{\text{オ}}}{\pi}$ をとる。

(2) 曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における曲線 C の接線を l_t とする。

(i) $t = 0$ のとき、直線 l_t の方程式は $y = \text{カ} x$ であり、 $t = 1$ のとき、直線 l_t の方程式は $y = -x + \text{キ}$ である。

(ii) $0 \leq t \leq 1$ において、直線 l_t の y 切片は

$t = \text{ク}$ のとき最小値 ケ をとり、

$t = \text{コ}$ のとき最大値 サ をとる。

(iii) $0 < t < 1$ とし、曲線 C の $0 \leq x \leq 1$ の部分、直線 l_t 、直線 $x = 0$ 、および、直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積を S_t とする。

S_t は $t = \frac{\text{シ}}{\text{ス}}$ のとき最小値 $\frac{\text{セ}}{\pi} - \frac{\text{ソ}}{\pi^2}$ をとる。

解答上の注意(つづき)

- (i) ア, イ, ウ, …… の1つ1つは, それぞれ, 0 から 9 までの数字, または, +, - のいずれか 1つに対応します。それらを, ア, イ, ウ, … で示された解答欄にマークしてください。

[例1]

ア

イウ

 に -30 と答えたいときは,

ア	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	+	-	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
ウ	+	-	●	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- (ii) 分数の形の解答が求められているときは, 既約分数で, 分母が正の数になる形で答えてください。

[例2]

エ

オ

 /

カ

 に $-\frac{5}{6}$ と答えたいときは,

エ	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	+	-	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9
カ	+	-	0	1	2	3	4	5	●	7	8	9