数　　　学

＜監督者の指示があるまで開いてはいけない＞

1. 試験開始後，まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後，速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は，手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後，持ち帰ってもよい。
ただし，試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1) 1 から 4 までの番号をつけた 4 個の箱と，1 から 4 までの番号をつけた 4 枚のカードがある。最初は，1，3 番の箱に赤玉が 1 個ずつ，2，4 番の箱に白玉が 1 個ずつ入っている。4 枚のカードから同時に 2 枚を取り出し，取り出したカードの番号と同じ番号の 2 つの箱に入っている玉を入れかえた後，カードをもとに戻す。この試行を 2 回繰り返すとき，1，3 番の箱に赤玉，2，4 番の箱に白玉が入っている確率は $\boxed{\text{(ア)}}$ であり，1，2 番の箱に赤玉，3，4 番の箱に白玉が入っている確率は $\boxed{\text{(イ)}}$ である。

(2) 複素数 $z = \cos\theta + i\sin\theta + \sqrt{3}(i\cos\theta - \sin\theta)$ において，θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ の範囲を動くとき，$|\sqrt{2}z - 1 + i|$ の最大値は $\boxed{\text{(ウ)}}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

2. xy 平面上において，半径 2 の円板が x 軸に接しながら正の方向にすべることなく回転するとき，円板上の定点 P が描く曲線 C_1 を考える。時刻 $t=0$ における円板の中心 D の位置を点 $(0,\ 2)$，P の位置を点 $(0,\ 1)$ とする。時刻 t において D が点 $(t,\ 2)$ の位置にあるように円板が回転していくとき，次の問いに答えよ。問い (1)(i) では $\boxed{}$ にあてはまる適切な式を解答欄に記入せよ。

(1) (i) 時刻 t における P の座標 $(x,\ y)$ を t を用いて表すと，$(x,\ y)=\left(\boxed{(\text{エ})},\ \boxed{(\text{オ})}\right)$ である。

(ii) x，y の t に関する増減をそれぞれ調べよ。

(2) 時刻 t に対応する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における C_1 の法線 ℓ が x 軸と交わる点を M とし，M が線分 PQ の中点となるような ℓ 上の点を Q とおく。Q の座標を t を用いて表せ。ただし，$t=0$ のときは Q を点 $(0,\ -1)$ とする。

(3) 点 Q が描く曲線を C_2 とする。2 曲線 C_1, C_2 と y 軸，および $t=3\pi$ のときの (2) における法線 ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

3. a を3以上の奇数の定数とする。方程式 $ax-2y=1$ をみたす自然数の組 $(x,\ y)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 組 $(x,\ y)$ は無数に存在することを示せ。

(2) 組 $(x,\ y)$ の列 $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2), \cdots, (x_n,\ y_n), \cdots$ が，条件「$n \geqq 2$ について x_n は，$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$ のどの項とも異なる」をみたすとする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}+\cdots+\frac{y_n}{x_n}\right)$ を a を用いて表せ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ を利用してよい。

4. 正四面体 ABCD があり，三角形 ABD 上に $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をみたす点 P をとる。三角形 ACD の重心を G，直線 GP と平面 ABC の交点を Q とする。線分 AB 上の点 R を，三角形 PQR が PQ を斜辺とする直角三角形となるようにとるとき，線分 AR，AB の長さの比の値 $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AB}}$ を求めよ。