

第1問 次の問い(問1~3)に答えよ。

問1 1以上の整数  $n$  に対して定義される  $a_n$  について  $a_1 = 1$  とし、 $xy$  平面における曲線  $y = x^3$  上の点  $A_n(a_n, a_n^3)$  における接線を  $L_n$  とする。直線  $L_n$  と

$x$  軸の交点を  $B_{n+1}(a_{n+1}, 0)$  とすると、 $a_{n+1} = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} a_n$  が成り立つ。

また、曲線  $y = x^3$  と線分  $A_n B_{n+1}$  および  $x$  軸によって囲まれる部分の面積を

$S_n$  とすると、 $S_1 = \frac{\text{ウ}}{\text{エオ}}$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\text{カキ}}{\text{クケコ}}$  である。

問2  $z \neq -\frac{1}{2}$  である複素数  $z$  に対して、 $w = \frac{3z+1}{2z+1}$  と定める。このとき、

$z$  は  $w$  を用いて  $z = \frac{-w + \text{サ}}{\text{シ}w - \text{ス}}$  と表される。 $z$  が純虚数である

とき、複素数平面において  $w$  の満たす点全体は、中心が  $\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$ 、半径

$\frac{\text{タ}}{\text{チ}}$  の円から2点  $\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$ 、 $\text{ト}$  を除いたものである。

問3 さいころ1個を3回投げて、出た目を順に  $x_1, x_2, x_3$  とする。 $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

が4の倍数となる確率は  $\frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$  である。また、 $x_1 + (x_2)^2 + (x_3)^3$  が4の

倍数となる確率は  $\frac{\text{ヌ}}{\text{ネノ}}$  である。なお、さいころの6個の目について、

どの目の出る確率も等しいものとする。

第2問 四面体OABCは辺の長さがOA = 8、OB = 9、OC = 10であり、 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 $\vec{OC} = \vec{c}$ とおくと、内積の値はそれぞれ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 64$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 82$ 、 $\vec{c} \cdot \vec{a} = 64$ を満たす。

また、3点A、B、Cを通る平面と点Dで接し、辺OA、OB、OCとそれぞれ点P、Q、Rで接する球をSとし、Sの中心をEとする。このとき、次の問い(問1~4)に答えよ。

問1 辺の長さはAB =  $\sqrt{\text{アイ}}$ 、AC =  $\text{ウ}$ である。また、四面体OABCの体積は  $\text{エオ} \sqrt{\text{カ}}$  である。

問2  $\vec{x}$ は $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ のそれぞれとなす角がともに $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )であり、 $|\vec{x}| = 1$ である。このとき、実数 $p$ 、 $q$ 、 $r$ を用いて $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ とおくと、 $\frac{p}{\cos\theta} = \frac{\text{キ}}{\text{クケ}}$ 、 $\frac{p}{r} = \frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ である。

問3 Sの半径は  $\text{シ}$  であり、 $\vec{OE} = \frac{\text{ス}}{\text{セソ}} \vec{a} + \frac{\text{タ}}{\text{チ}} \vec{c}$ と表される。

問4  $\vec{OQ} = \frac{\text{ツ}}{\text{テ}} \vec{b}$ である。また、四面体OABCの体積を $V_1$ 、四面体OPQRの体積を $V_2$ とすると、 $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{ト}}{\text{ナニ}}$ である。

第3問  $xy$ 平面において

$$\begin{cases} x = \sin 2\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

によって表される曲線を  $C$  とする。このとき、次の問い (問1~4) に答えよ。

問1  $C$  上の点を  $P(x, y)$  とする。 $x$  座標が最大であるときの  $y$  座標は

$\frac{\sqrt{\text{ア}}}{\text{イ}}$  である。また、 $C$  と  $x$  軸の共有点のうち原点ではないものを点

$Q$  とすると、 $Q$  は  $\theta = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}\pi$  に対応する点であり、 $Q$  における曲線  $C$

の接線の方程式は  $y = \text{オ}x - \frac{\text{カ}\sqrt{\text{キ}}}{\text{ク}}$  である。

問2  $y^2 = \frac{\text{ケ} - \cos \text{コ} \theta}{\text{サ}},$

$$y^2 \frac{dx}{d\theta} = \cos \text{シ} \theta - \frac{\text{ス}}{\text{セ}} (\cos \text{ソ} \theta + \cos \text{タ} \theta)$$

である。ただし、 $\text{ソ} < \text{タ}$  とする。

問3  $C$  と直線  $y = x$  の共有点で原点でないものを点  $A(a, a)$  とすると、 $A$

は  $\theta = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}\pi$  に対応する  $C$  上の点であり、この値を  $\theta_0$  とおくと

$$\cos \theta_0 = \frac{\text{テ} + \sqrt{\text{ト}}}{\text{ナ}}$$

となる。また、

$$a^2 = \frac{\text{ニ} + \sqrt{\text{ヌ}}}{\text{ネ}}$$

となる。

問4 Cと直線 $y = x$ で囲まれる部分を $x$ 軸の周りに回転して得られる立体の体積を $V$ とする。 $a$ を問3の値とすると、

$$\frac{V}{a} = \frac{\boxed{\text{ノハ}} - \boxed{\text{ヒ}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘホ}}} \pi \text{となる。}$$

*Windom*