

(解答はすべて解答用紙に記入すること)

第 1 問 3 個のさいころ A、B、C を同時に投げて、出た目をそれぞれ a 、 b 、 c とする。このとき、座標平面上の 2 点 $P(a, 0)$ 、 $Q(b, c)$ について次の問いに答えよ。

問 1 線分 PQ の長さが 1 となる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

問 2 線分 PQ の長さが最大となるとき、その最大値は $\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また線分 PQ の長さが最大となる確率は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

問 3 2 点 P、Q を通る直線の傾きが 2 となる確率は $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

問 4 線分 PQ 全体が円 $x^2 + y^2 = 12$ の内部にある確率は $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

問 5 線分 PQ が放物線 $y = \frac{7}{2} - x^2$ と共有点をもたない確率は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

第 2 問 分母が偶数、分子が自然数であって、0 より大きく 1 より小さい分数を次のように並べた数列を考える。また、 n を自然数とすると、第 n 群が $2n$ 個の項を含むようにこの数列を区分する。次の問いに答えよ。

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \mid \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6} \mid \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8} \mid \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10} \mid \frac{5}{10}, \dots$
 第 1 群 第 2 群 第 3 群 第 4 群 ...

問 1 この数列の第 50 項は第 $\boxed{\text{ア}}$ 群に含まれ、この群の第 $\boxed{\text{イ}}$ 項目である。

問 2 第 9 群の第 3 項目は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

問 3 第 n 群の末項は $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{キ}}}n + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

問 4 第 n 群に含まれるすべての項の和は $\boxed{\text{ケ}}n - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

問 5 この数列の初項から第 111 項までの和は $\boxed{\text{シ}}$ である。

第 3 問 曲線 $C: y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ ($0 < x < 1$) 上の点 P における接線 ℓ が x 軸と交わる点を Q とし、P から x 軸に下ろした垂線を PR とする。点 P の x 座標を a とするとき、次の問いに答えよ。

問 1 Q の x 座標を、 a を用いて表すと $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a^3 + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}a$ である。

問 2 QR の長さを、 a を用いて表すと $-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}a^3 + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}a$ である。

問 3 QR の長さが最大となる a の値は $\sqrt{\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}}$ である。このときの QR の長さは $\frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ で、Q の座標は

$\left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \sqrt{\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{タ}}}} \right)$ である。また、 ℓ の方程式は $y = -\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{テ}}}\sqrt{\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{ト}}}}x + \boxed{\text{ト}}$ である。

問 4 a が問 3 で求めた値のとき、C と ℓ と y 軸とで囲まれた部分の面積は $\log \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ニ}} + \boxed{\text{ヌ}}}\right) - \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ネ}}} - \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。