問題 1

$0 \leqq \alpha, \beta \leqq \pi$ である α, β が

$$1 - \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) = 0, \qquad 1 - \cos\beta + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

を満たすとき，$(\alpha, \beta) =$ $\boxed{(1)}$ である．

問題 2

放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ $\cdots$ ① に対して

(i) ① の焦点の座標は $\boxed{(2)}$ である．

(ii) ① を y 軸に関して対称に移動し，さらに直線 $y = x$ に関して対称に移動して得られた 2 次曲線の方程式は $\boxed{(3)}$ であり，その焦点の座標は $\boxed{(4)}$ である．

問題 3

a, $f(x)$ をそれぞれ与えられた定数，連続関数とし，関数 $w(x)$ を

$$w(x) = \int_0^x e^{-a(x-s)} f(s)\, ds \qquad (*)$$

で定義する．

(i) $w'(x)$, $w(x)$, $f(x)$ の間に成り立つ関係式は $\boxed{(5)}$ $= f(x)$ である．

(ii) $w'(x) + w(x) = x^2$ および $w(0) = 0$ を満たす関数 $w(x)$ を，$(*)$ において a と $f(x)$ を適当に決めることで求めると，$w(x) =$ $\boxed{(6)}$ である．

(iii) $f(x)$ が微分可能で，$f'(x) = g(x)$ であるとする．このとき，$w''(x)$ を $w(x)$, $f(x)$, $g(x)$ を用いて表すと $w''(x) =$ $\boxed{(7)}$ である．

問題 4

ともに質量が $m > 0$ の 2 個の質点 P_1, P_2 が x 軸上にあり，時刻 t におけるそれぞれの座標が $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ であるとする．P_2 に力 $F = F(t)$ が働き，P_1, P_2 の間の距離に応じたある力が相互に働くことによる P_1, P_2 の運動が

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k\{(x_2 - x_1) - \ell\}, \qquad m\frac{d^2x_2}{dt^2} = k\{(x_2 - x_1) - \ell\} + F$$

で記述されるものとする．ただし，k, ℓ は正の定数である．

(i) $x_2 - x_1 = u$ とおく．u が満たす関係式を，u，F と上記定数の中から適切なものを用いて表すと $m\dfrac{d^2u}{dt^2} =$ $\boxed{(8)}$ である．

(ii) $x_2 + x_1 = v$ とおく．v が満たす関係式を，F と上記定数の中から適切なものを用いて表すと $m\dfrac{d^2v}{dt^2} =$ $\boxed{(9)}$ である．

(iii) $F(t) = C$ (定数) とするとき，問題 3 の (iii) を参考にし，$(*)$ において，a と $f(x)$ を適当に決めることで u と v を求めると，$u =$ $\boxed{(10)}$, $v =$ $\boxed{(11)}$ である．ただし u は $\displaystyle\lim_{t \to \infty} u(t)$ が発散しないものを求めよ．

問題 5

空間における点 $\mathrm{H}(x, y, z)$ が

$$x = x(t) = a\cos\omega t, \qquad y = y(t) = a\sin\omega t, \qquad z = z(t) = bt$$

で与えられている．ただし a, b, ω は正の定数とする．$t \geqq 0$ に対して点 H の描く図形を考える．

(i) 原点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ から点 H までの距離 $\mathrm{OH} = \boxed{(12)}$ である．

(ii) $\mathrm{OH} = d$ とおくとき，これを満たす t の値を t_d とすると，$t_d = \boxed{(13)}$ である．

(iii) $t = 0$ から $t = t_d$ まで点 H が動いて描く図形の長さを求めると $\boxed{(14)}$ である．

(iv) これらの $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ に対して，座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(x(t+h), y(t+h))$, $\mathrm{Q}(x(t), y(t))$ をとり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を考えるとき $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{|z(t+h) - z(t)|}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|} = \boxed{(15)}$ である．