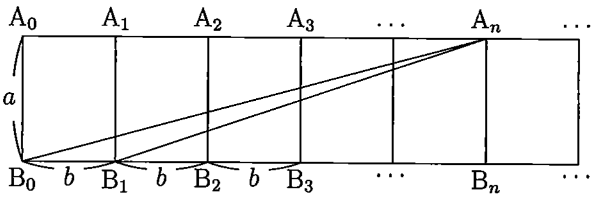
数 学 問 題・答 案 用 紙（一）

I. $2xf'(x) = 5f(x) + f(x-2)$, $f(0) = -2$ を満たす整式 $f(x)$ を求めよ。

II. 三角形 ABC の内接円の中心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。$|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $|\vec{c}| = \sqrt{10}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -2$ であるとき，$|\vec{b} - \vec{c}|$ を求めよ。

III. 縦の長さ a, 横の長さ b の長方形を横に並べ, n を自然数として下図のように $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n, \cdots$ および $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n, \cdots$ をそれぞれ等間隔にとる。



$\angle \mathrm{B}_0\mathrm{A}_n\mathrm{B}_1 = \theta_n$ とするとき, 次の問いに答えよ。

1) $\tan\theta_n$ を n, a, b を用いて表せ。

2) 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tan\theta_n}{b - a\tan\theta_n}$ を求めよ。

IV. 硬貨を投げて表が出たら「勝ち」とし, 表が連続して出たときには「連勝」と呼ぶ。例えば 12 回投げて次のような結果であった場合,

表 表 表 表 裏 裏 表 表 表 表 表 裏

「4 連勝」と「5 連勝」があるが, 4 連勝は 1 度だけ起こったと定義する (つまり, 5 連勝以上は 4 連勝としない)。

次の問いに答えよ。

1) 1 枚の硬貨を k 回投げて 4 連勝が起こる確率を p_k とするとき, p_4, p_5, p_6, p_7 を求めよ。

2) 1 枚の硬貨を 12 回投げて 4 連勝が 1 度だけ起こる確率 P を p_4, p_5, p_6, p_7 を用いて表し, P の値を求めよ。

V. 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺の上に異なる 2 点 E, F をとり, 線分 EF によって正方形 ABCD が面積 $\dfrac{3}{4}$ と面積 $\dfrac{1}{4}$ の 2 つの図形に分割されるようにする。線分 EF の中点を G とするとき, G の軌跡によって囲まれる部分の面積 S を求めよ。