2014年2月3日実施　東海大(医学部)　２日目

1

(1)　$x^2-2y^2-xy+x+4y-2$ を因数分解すると$\boxed{\text{ア}}$である。

(2)　$3^{\log_9 8}=\boxed{\text{イ}}$

(3)　関数$f(x)=4^x+4^{-x}-3(2^x+2^{-x})+6$は$x=\boxed{\text{ウ}}$のとき最小値$\boxed{\text{エ}}$をとる。

(4)　$\int_1^e(2x+1)\log x\,dx=\boxed{\text{オ}}$

(5)　$a>0$とする。2つの円$x^2+y^2=9$と$x^2-2ax+y^2-2y+1=0$が共有点を持たないaの範囲は$\boxed{\text{カ}}$である。

(6)　$a>0$のとき、$a+\dfrac{17}{a+4}$は$a=\boxed{\text{キ}}$において最小値$\boxed{\text{ク}}$をとる。

(ア)　$(x-2y+2)(x+y-1)$　(イ)　$2\sqrt{2}$　(ウ)　0　(エ)　2　(オ)　$\dfrac{1}{2}e^2+\dfrac{3}{2}$

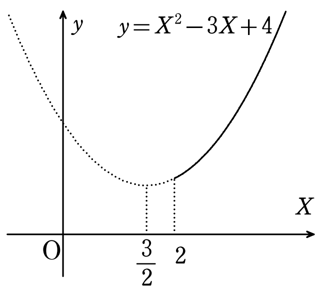
(カ)　$0<a<\dfrac{4}{3}$　(キ)　$\sqrt{17}-4$　(ク)　$2\sqrt{17}-4$

(解説)

(1)　$x^2-2y^2-xy+x+4y-2=x^2-(y-1)x-2(y-1)^2$
　$=\{x-2(y-1)\}\{x+(y-1)\}=(x-2y+2)(x+y-1)$

(2)　$3^{\log_9 8}=3^{\frac{1}{2}\log_3 8}=8^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(3)　$X=2^x+2^{-x}$とおく。
　$2^x>0,\ 2^{-x}>0$ゆえ相加相乗平均の不等式より、
$$X=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$
である。等号成立条件は$2^x=2^{-x}$の時なので
$x=0$となる。このXを用いると、
$$f(x)=(X^2-2)-3x+6$$
$$=X^2-3X+4=\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$
　なので、最小値は$X=2$の時である(右図参照)。
　このとき、最小値$=2^2-3\cdot 2+4=2$
　また、$X=2$となるのは$x=0$の時である。



(4)　$\int_1^e(2x+1)\log x\,dx=\Big[(x^2+x)\log x\Big]_1^e-\int_1^e(x^2+x)\cdot\dfrac{1}{x}dx$
$$=(e^2+e)-\int_1^e(x+1)dx=(e^2+e)-\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^e$$
$$=(e^2+e)-\left(\frac{e^2}{2}+e\right)+\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}$$

(5)　$x^2+y^2=9 \Leftrightarrow$ 中心$(0,0)$ 半径3 の円
$x^2-2ax+y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-1)^2=a^2 \Leftrightarrow$ 中心$(a,1)$ 半径a の円
中心間の距離$=d=\sqrt{a^2+1}$ である。円が交わらない条件は
中心間>半径の和 または 中心間<半径の差 の時である。

(i)　$d>a+3$ 即ち、$\sqrt{a^2+1}>a+3$の時。
　両辺を2乗して$a^2+1>a^2+6a+9 \Leftrightarrow a<-\dfrac{4}{3}$ これと$a>0$の共通部分はないので
　解なし。

(ii)　$d<|a-3|$ 即ち、$\sqrt{a^2+1}<|a-3|$ の時。
　両辺を2乗して$a^2+1<a^2-6a+9 \Leftrightarrow a<\dfrac{4}{3}$ これと$a>0$の共通部分より解は
　$0<a<\dfrac{4}{3}$となる。

以上より、求める条件は$0<a<\dfrac{4}{3}$

(6)　$a>0$の時、$a+4>0,\ \dfrac{17}{a+4}>0$なので相加相乗平均の不等式を用いると
$$a+\frac{17}{a+4}=a+4+\frac{17}{a+4}-4\geqq 2\sqrt{(a+4)\cdot\frac{17}{a+4}}-4=-4+2\sqrt{17}$$
等号成立条件は$a+4=\dfrac{17}{a+4} \Leftrightarrow (a+4)^2=17 \Leftrightarrow a+4=\pm\sqrt{17} \Leftrightarrow a=-4\pm\sqrt{17}$
$a>0$より、$a=-4+\sqrt{17}$ に限る。
よって、$a=-4+\sqrt{17}$のとき最小値は$-4+2\sqrt{17}$となる。

2

4次関数$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$がある。$y=f(x)$のグラフと直線ℓは、
2点$(0,f(0)),(3,f(3))$で接している。さらに、$y=f(x)$は$x=p$において極大値をとる。

(1)　直線ℓがx軸のとき、$f(x)=\boxed{\text{ア}}$, $p=\boxed{\text{イ}}$であり、$f(x)$の極大値は$\boxed{\text{ウ}}$である。

(2)　$p=\dfrac{2}{3},\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=0$のとき、直線$\ell$の方程式は$y=\boxed{\text{エ}}x+\boxed{\text{オ}}$である。

(3)　直線ℓが$y=4x$のとき、$p=\boxed{\text{カ}}$であり、$f(x)$は$x=\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$のとき
　極小値をとる。ただし、$\boxed{\text{キ}}<\boxed{\text{ク}}$とする。

(ア)　$x^4-6x^3+9x^2$　(イ)　$\dfrac{3}{2}$　(ウ)　$\dfrac{81}{16}$　(エ)　$-\dfrac{140}{27}$　(オ)　$\dfrac{28}{27}$

(カ)　2　(キ)　$\dfrac{5-\sqrt{33}}{4}$　(ク)　$\dfrac{5+\sqrt{33}}{4}$

(解説)

(1)　$y=f(x)$は$x=0$と$x=3$でx軸と接するので、
　$f(x)=x^2(x-3)^2=x^4-6x^3-9x^2$
また、$f'(x)=2x\cdot(x-3)^2+x^2\cdot 2(x-3)=2x(x-3)(2x-3)$ より 増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
f'	−	0	+	0	−	0	+
f	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

となるので、$x=p=\dfrac{3}{2}$で極大となり、極大値$=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\left(\dfrac{3}{2}-3\right)^2=\dfrac{81}{16}$となる。

(2)　$f(x)$は$x=\dfrac{2}{3}$で極大値0をとるので$f(x)=\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2(x^2+px+q)$とおける。
　接線の式を$y=mx+n$とおくと、$(0,f(0)),(3,f(3))$で$y=f(x)$と接するので、
$$f(x)-(mx+n)=x^2(x-3)^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x^2+px+q)-(mx+n)=x^2(x-3)^2\ \cdots ①$$
が成り立つ。①に$x=\dfrac{2}{3}$を代入すると
$$-\frac{2}{3}m-n=\frac{4}{9}\cdot\frac{49}{9} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}m-n=\frac{196}{81}\ \cdots ②$$
①をxで微分すると
$$2\left(x-\frac{2}{3}\right)(x^2+px+q)+\left(x-\frac{2}{3}\right)(2x+p)-m=2x(x-3)(2x-3)$$
これに$x=\dfrac{2}{3}$を代入すると
$$-m=\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{140}{27} \Leftrightarrow m=-\frac{140}{27}$$
これを②に代入すると、
$$-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{140}{27}\right)-n=\frac{196}{81} \Leftrightarrow n=\frac{280-196}{81}=\frac{84}{81}=\frac{28}{27}$$
よって、接線の式は$y=-\dfrac{140}{27}x+\dfrac{28}{27}$

(3)　接線の式は$y=4x$で、$(0,f(0)),(3,f(3))$で$y=f(x)$と接するので、
　$f(x)-4x=x^2(x-3)^2$
　$\Leftrightarrow f(x)=x^2(x-3)^2+4x=x^4-6x^3+9x^2+4x$
　$f'(x)=4x^3-18x^2+18x+4=2(x-2)(2x^2-5x-1)$
　$2x^2-5x-1=0$の解は解の公式より$x=\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{4}$なので、$f'(x)=0$の解は
　$x=2,\ \dfrac{5\pm\sqrt{33}}{4}$となる。増減表は

x	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{33}}{4}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{33}}{4}$	$\cdots$
f'	−	0	+	0	−	0	+
f	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

となるので、$x=p=2$で極大、$x=\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{4}$で極小となる。

$\boxed{3}$

$\sqrt{n}$ を小数点以下第一位で四捨五入した整数をa_nとする数列$\{a_n\}$を考える。

(1) $a_{150}=$ $\boxed{\text{ア}}$

(2) $6 \leqq a_n \leqq 7$のとき、$\boxed{\text{イ}} \leqq n \leqq \boxed{\text{ウ}}$ である。一般に正の整数kについて、

$a_n=k$となる範囲は第$\boxed{\text{エ}}$項から第$\boxed{\text{オ}}$項までである。

(3) $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq 1000$ となる最小のnにおいて $a_n=$ $\boxed{\text{カ}}$ であり、$n=$ $\boxed{\text{キ}}$ である。

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{2n}}{a_n}=$ $\boxed{\text{ク}}$

(ア) 12 (イ) 31 (ウ) 56 (エ) k^2-k+1 (オ) k^2+k (カ) 11 (キ) 131

解説

(1) $12^2=144,\ 13^2=169$より、$\sqrt{150}$の整数部分は12。

$12.5^2=156.25>150$より、$12<\sqrt{150}<12.5$ よって$a_{150}=12$

(2) $(6-0.5)^2=5.5^2=30.25<n$ より、$a_n=6$となる最小のnは 31

$(7+0.5)^2=7.5^2=56.25>n$ より、$a_n=7$となる最大のnは56

よって、$6 \leqq a_n \leqq 7$のとき、$31 \leqq n \leqq 56$である。

$a_n=k$となる整数nの範囲は$k-\dfrac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\dfrac{1}{2}$であるから、

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)^2<n<\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow k^2-k+\frac{1}{4}<n<k^2+k+\frac{1}{4}$$ となる。

この範囲にある整数はk^2-k+1からk^2+kまでなので、

$a_n=k$となる範囲は第k^2-k+1項から第k^2+k項まででである。

(3) (2)の結果より、$a_n=k$となる個数は$(k^2+k)-(k^2-k+1)+1=2k$ 個である。

1群 2群 3群 4群

1,1 | 2,2,2,2 | 3,3,3,3,3,3 | 4,…

という群数列を考える。k群はkが$2k$個並んでいるので、その和は$2k^2$である。

よって、m群までの和は$S_m=\sum_{k=1}^{m} 2k^2=\dfrac{1}{3}m(m+1)\cdot 7(2mx+1)$である。

$$S_{10}=\frac{1}{3}\cdot 10\cdot 11\cdot 21=770<1000$$

$$S_{11}=\frac{1}{3}\cdot 11\cdot 12\cdot 23=1012>1000$$

よって、a_nは11群にあるので、$a_n=11$

m群の最後の順番は$\sum_{k=1}^{m} k$群の個数$=\sum_{k=1}^{m} 2k=m(m+1)$項なので、

10群の最後は$10\cdot 11=110$より第110項である。

$(1000-770)\div 11=230\div 11=20$余り10なので、11を21個足すと1000を超える。

よって、$n=110+21=131$

(4) $[x]$は実数xを超えない最大整数とする。これを使うと

$a_{2n}=\left[\sqrt{2n}+\dfrac{1}{2}\right],\ a_n=\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]$と表せる。

$x-1<[x] \leqq x$であるから、

$$\frac{\sqrt{2n}+\frac{1}{2}-1}{\sqrt{n}+\frac{1}{2}}<\frac{a_{2n}}{a_n}<\frac{\sqrt{2n}+\frac{1}{2}}{\sqrt{n}+\frac{1}{2}-1}$$

であり、$\lim_{n\to\infty}$左辺$=\lim_{n\to\infty}$右辺$=\sqrt{2}$ とはさみうちの原理より$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_n}=\sqrt{2}$