2014年2月2日実施　東海大(医学部)　１日目

$\boxed{1}$

(1)　$x^2-10x+y^2+24y=0$は点$\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)$を中心とし、半径$\boxed{\text{ウ}}$の円の方程式である。

(2)　$0<\theta<\pi$とする。$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$のとき、$\cos 2\theta=\boxed{\text{エ}}$, $\sin\dfrac{\theta}{2}=\boxed{\text{オ}}$である。

(3)　2つのベクトル$\vec{a}=(1,\ -2, 3)$, $\vec{b}=(3,\ -1, 2)$のなす角をθとすると、$\cos\theta=\boxed{\text{カ}}$である。

(4)　直線$2x-3y+2=0$に関して点$(7, 14)$と対称な点の座標は$\left(\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}\right)$である。

(5)　2^{85}は$\boxed{\text{ケ}}$桁の整数である。ただし、$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(ア)　5　(イ)　-12　(ウ)　13　(エ)　$\dfrac{1}{8}$　(オ)　$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(カ)　$\dfrac{11}{14}$

(キ)　15　(ク)　2　(ケ)　26

解説

(1)　$x^2-10x+y^2+24y=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+12)^2=169=13^2$
より、中心(5, 12) 半径 13の円

(2)　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-1=\dfrac{9}{8}-1=\dfrac{1}{8}$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}(1-\cos\theta)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{8}$

$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ ゆえ、$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(3)　$|\vec{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$, $|\vec{b}|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=3+2+6=11$ より、

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{11}{14}$

(4)　$P(7, 14)$とし求める点を$Q(X,Y)$とする。

PQの中点$\left(\dfrac{X+7}{2}, \dfrac{Y+14}{2}\right)$が$2x-3y+2=0$上にあるので、

$2\cdot\dfrac{X+7}{2}-3\cdot\dfrac{Y+14}{2}+2=0 \Leftrightarrow 2X-3Y=24$ … ①

$2x-3y+2=0$の傾きは$\dfrac{2}{3}$であり、この直線とPQが直交するので

$\dfrac{Y-14}{X-7}\cdot\dfrac{2}{3}=-1 \Leftrightarrow 3X+2Y=49$ … ②

①と②より、$(X,Y)=(15, 2)$

(5)　$\log_{10}2^{85}=85\log_{10}2=85\cdot 0.3010=25.585$ より、

$10^{25}<2^{85}<10^{26}$　よって、26桁。

$\boxed{2}$

2以上の自然数Nがある。繰り返しさいころを投げて、次のルール(i), (ii)に従ってゲームをする。

(i) さいころを投げて、異なる目が出たらゲームを終了し、さいころを投げた回数を得点とする。

(ii)　さいころを投げて、N回続けて同じ目が出たらゲームを終了し、得点を$N+1$点とする。

例えば、$N=4$とする。1回目と2回目に5の目が出て、3回目に5以外の目が出たとき得点は3となり、1回目から4回目まで同じ目が出たとき得点は5となる。

(1)　$N\geqq 4$とする。さいころをちょうど2回投げて、ゲームが終了する確率は$\boxed{\text{ア}}$であり、ちょうど3回投げて、ゲーム終了する確率は$\boxed{\text{イ}}$である。

(2)　得点がN以上になる確率は$\boxed{\text{ウ}}$である。

(3)　$N=3$ のとき、得点の期待値は$\boxed{\text{エ}}$である。

(4)　$2\leqq n\leqq N$ のとき、得点がnとなる確率は$\boxed{\text{オ}}\cdot\left(\boxed{\text{カ}}\right)^n$であり、得点の期待値を$a_N$とすると、$a_N=\boxed{\text{キ}}$, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}a_N=\boxed{\text{ク}}$である。

(ア)　$\dfrac{5}{6}$　(イ)　$\dfrac{5}{36}$　(ウ)　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-2}$　(エ)　$\dfrac{79}{36}$　(オ)　39　(カ)　$\dfrac{1}{6}$

(キ)　$\dfrac{11}{5}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-1}$　(ク　$\dfrac{11}{5}$

解説

(1)　1回目はどの目がでてもよく、2回目は1回目と異なれば良いので求める確率は

$\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{6}$

1回目はどの目がでてもよく、2回目は1回目と同じ、3回目は1回目と異なれば良いので求める確率は

$\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{36}$

(2)　得点がN＋1点になるのは1回目からN回目まで全て同じ目が出れば良い。

つまり、1回目はどの目がでてもよく、2回目からN回目までは1回目と同じならば良いので求める確率は

$\dfrac{6}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-1}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-1}$

得点がN点になるのはは1回目からN－1回目まで全て同じ目が出て、N回目が1回目と異なれば良い。　つまり、1回目はどの目がでてもよく、2回目からN－1回目までは1回目と同じで、N回目が1回目と異なれば良いので求める確率は

$\dfrac{6}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-2}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{6}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-2}$

よって求める確率は　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-1}+\dfrac{5}{6}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-2}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-2}$

(3)　2点となる確率は$\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{6}$　3点となる確率は$\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{36}$　4点となる確率は$\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$なので、求める期待値は

$E=2\cdot\dfrac{5}{6}+3\cdot\dfrac{5}{36}+4\cdot\dfrac{1}{36}=\dfrac{79}{36}$

(4)　得点がn点になるのはは1回目から$n-1$回目まで全て同じ目が出て、n回目が1回目と異なれば良い。　つまり、1回目はどの目がでてもよく、2回目から$n-1$回目までは1回目と同じで、n回目が1回目と異なれば良いので求める確率は

$P_n=\dfrac{6}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-2}\cdot\dfrac{5}{6}=30\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$　$(2\leqq n\leqq N)$

また、$P_{N+1}=\dfrac{6}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-1}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-1}$

求める期待値は

$$a_N=\sum_{n=2}^{N}n\cdot P_n+(N+1)\cdot P_{N+1}=30\sum_{n=2}^{N}n\left(\frac{1}{6}\right)^n+(N+1)\left(\frac{1}{6}\right)^{N-1}\ \cdots ①$$

となる。$T=\displaystyle\sum_{n=2}^{N}n\left(\frac{1}{6}\right)^n$とおく。

$$T-\frac{1}{6}T=2\left(\frac{1}{6}\right)^2+\sum_{k=1}^{N-2}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}-N\left(\frac{1}{6}\right)^{N+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}T=\frac{1}{18}+\frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{N-2}\right\}-N\left(\frac{1}{6}\right)^{N+1}$$

よって、$T=\dfrac{11}{150}-\dfrac{36}{25}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N+1}-\dfrac{6}{5}N\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N+1}$

ゆえに、$a_N=\dfrac{11}{5}-\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-1}-N\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-1}+(N+1)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-1}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{N-1}$

よって、$\displaystyle\lim_{N\to\infty}a_N=\frac{11}{5}$

$\boxed{3}$

4頂点の座標が$(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$の正方形と、$(2,0), (2+x,0), (2+x,x), (2,x)$は(ただし、$x>0$)の正方形をあわせた図形を$F$とする。

点$(0,h)$を通りx軸に平行な直線がFを面積の等しい2つの図形に分けている。

(1)　$x=3$のとき$h=$ $\boxed{\text{ア}}$, $x=8$のとき$h=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

　また、$h=3$のとき$x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ であり、$h\leqq\dfrac{7}{8}$となるにようなxの範囲は

　$\boxed{\text{エ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{オ}}$ である。

(2)　hをxの関数と考える。

　(i)　関数hの$x=3$における微分係数は $\boxed{\text{カ}}$ である。

　(ii)　曲線$y=h$と直線$x=6$, $x=8$とx軸で囲まれた図形をx軸の周りに1回転してできる回転体の体積は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(ア)　$\dfrac{13}{10}$　(イ)　$\dfrac{15}{4}$　(ウ)　$3+\sqrt{13}$　(エ)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(オ)　$\dfrac{7+\sqrt{17}}{8}$　(カ)　$\dfrac{17}{50}$　(キ)　$\dfrac{125}{6}\pi$

解説

(i)　$0<h\leqq x$の時。

$x^2+2^2=(2h+x^2)\times 2$ より、$h(x)=1-\dfrac{1}{4}x^2\cdots$ ①

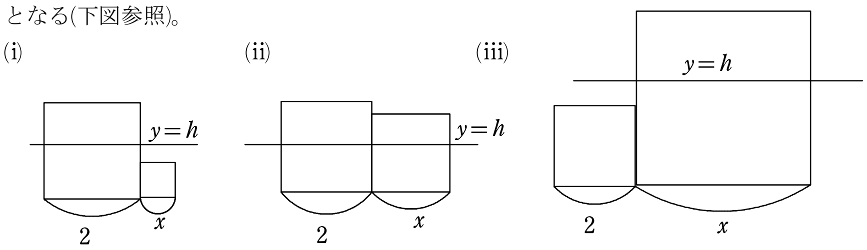
(ii)　$x\leqq h\leqq 2$の時。

$x^2+2^2=h(x+2)\times 2$ より、$h(x)=\dfrac{x^2+4}{2(x+2)}\cdots$ ②

(iii)　$2\leqq h$の時。

$x^2+2^2=(2^2+xh)\times 2$より、$h(x)=\dfrac{x^2-4}{2x}$ $\cdots$ ③

となる(下図参照)。



また、(i)と(ii)の境目は①において、$h=x$とすれば良いので、

$x=1-\dfrac{1}{4}x^2$ より、$x^2+4x-4=0$　$x>0$より、$x=-2+2\sqrt{2}$ の時であり、

(ii)と(iii)の境目は②において、$h=2$とすれば良いので、

$2=\dfrac{x^2+4}{2(x+2)}$ より、$x^2-4x-4=0$　$x>0$より、$x=2+2\sqrt{2}$ の時である。

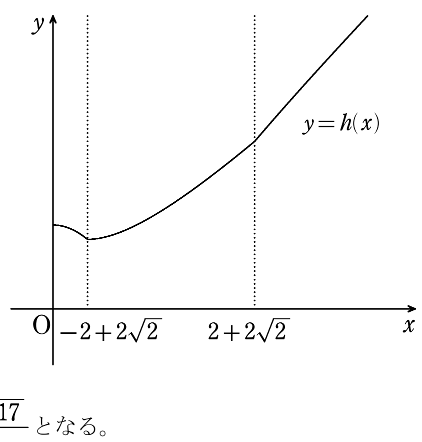
(1)　$x=3$の時。②に$x=3$を代入して　$h(3)=\dfrac{3^2+4}{2(3+2)}=\dfrac{13}{10}$

　$x=8$の時。③に$x=8$を代入して　$h(8)=\dfrac{8^2-4}{2\cdot 8}=\dfrac{60}{16}=\dfrac{15}{4}$

$h=3$となるので、(iii)の時なので、$h=3$を③に代入して

　$3=\dfrac{x^2-4}{2x}\Leftrightarrow x^2-6x-4=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{13}$

　$x>0$より、$x=3+\sqrt{13}$



(2)　(前半)

　$y=f(x)$のグラフは右図のようになる。

　$1-\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{7}{8}$ を解くと$x^2=\dfrac{1}{2}$

　$x>0$より、$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

　$\dfrac{x^2+4}{2(x+2)}=\dfrac{7}{8}$を解く。

　$4x^2-7x+2=0$より、$x=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{8}$

　$-2+2\sqrt{2}\leqq x\leqq 2+2\sqrt{2}$ ゆえ$x=\dfrac{7+\sqrt{17}}{8}$ となる。

よって、$h(x)\leqq\dfrac{7}{8}$を満たすxの範囲は　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\dfrac{7+\sqrt{17}}{8}$ となる。

(後半)　$6\leqq x\leqq 8$のとき、$h(x)=\dfrac{x^2-4}{2x}$ $=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}$ である。

求める回転体の体積をVとすると、

$$V=\pi\int_6^8(h(x))^2dx=\pi\int_6^8\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^2dx=\frac{\pi}{4}\int_6^8\left(x^2-8+\frac{16}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}x^3-8x-\frac{16}{x}\right]_6^8=\frac{125}{6}\pi$$