Windomの解答速報 昭和大学Ⅱ期(医) 数学

【問題】

$\boxed{1}$

次の各問に答えよ。ただし、(1)(2)に関しては答は結果のみ解答欄に記入せよ。
複素数平面上に原点を中心とした単位円がある。
この円周上に点A, B, C, D, Eを反時計回りに順に等間隔になるように取り、点Aは
実軸の正の部分に定めるとする。
また、複素数αを表す点をBとする。ただし、$x=\sin\frac{\pi}{3}$ であれば　$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ というように、
答に三角関数を含む場合は、三角関数の形ではなくその値を書くこと。

(1)　$\alpha+\frac{1}{\alpha}$の値を求めよ。

(2)　$|\alpha-1|$の値を求めよ。

(3)　$\sin\frac{\pi}{5}$の値を求めよ。

$\boxed{2}$

次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　裏がでる確率が表のでる確率の2倍であるように細工されたコインがある。
このコインを1回投げて, 表が出たら300円もらえ, 裏が出たら100円支払うという
ゲームを考える。ただし、1回コインを投げるごとに40円支払うものとする。
A君は, 所持金400円でこのゲームに参加することにした。
ゲームが5回終了した時点でA君の所持金が初めの3倍以上になる確率を求めよ。

(2)　x軸上の区間$[0, 1]$をn等分点する点を順に$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ \cdots x_k=\frac{k}{n},\ \cdots,\ x_n=1$と
する。この区間において$y=x^2$上に, $n+1$個の…を$y_k=(x_k)^2$となるように定めるとする。

(2−1)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{k-1}+y_k}{2n}$を$n$の式で表せ。

(2−2)　$\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ。

$\boxed{3}$

次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$のとき次の値を求めよ。

(1−1)　$\sin\theta\cos\theta$

(1−2)　$\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}$

(2)　任意の正の定数aに対して、関係$\frac{a}{x}+\frac{1}{y}=1$が成り立っているとする。
この条件のもとで, $x>0,\ y>0$ のとき、$x+y$の最小値をaを用いて表せ。

(3)　次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi}|\cos x-\cos 2x|dx$$

(4)　点$(1, 3)$を通る直線の方程式を$y=f(x)$とするとき、次の定積分の値を最小にする
ように$f(x)$を定めよ。

$$\int_0^2\{x^2-f(x)\}^2dx$$

$\boxed{4}$

次の各問に答えよ。ただし、(1)に関しては, 答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　2つの曲線$y=2\sin^2 x\ (0\leqq x\leqq\pi),\ y=\cos 2x\ (0\leqq x\leqq\pi)$について次の問いに答えよ。

(1−1)　2つの曲線の交点の座標を求めよ。

(1−2)　2つの曲線によって囲まれる図形の面積を求めよ。

(2)　実数x, yに対して、次の関係式が成り立つとする。このとき, x, yの値を求めよ。

$$\log_x y=\log_y x=-\log_3(x+y)$$

【答】

$\boxed{1}$

(1)　$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　(2)　$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$　(3)　$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$\boxed{2}$

(1)　$\frac{11}{243}$　(2−1)　$\frac{2n^2+1}{6n^2}$　(2−2)　$\frac{1}{3}$

$\boxed{3}$

(1−1)　$-\frac{1}{3}$　(1−2)　-18　(2)　$(\sqrt{a}+1)^2$

(3)　$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　(4)　$f(x)=2x+1$

$\boxed{4}$

(1−1)　$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2}\right)$　(1−2)　$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

(2)　$(x, y)=\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{3\mp\sqrt{5}}{2}\right)$(復号同順)

総評

今年の昭和II期の問題はI期の問題より難化したと思われる。
$\boxed{1}$は複素数平面の大問で驚いた学生もいるだろう。また、答が二重根号になるがそれに戸惑う生徒も多かったのではないだろうか。
$\boxed{2}$の確率は得点の条件を立式し、何回表が出ればよいかがわかれば反復試行の確率に過ぎない。
$\boxed{3}$ (2)はうまく分数関数の形に変形できたかどうかで明暗が分かれると思われる。
　積分の計算や三角関数、指数対数の計算をきちんと解くことが合格への近道だったと思われる。

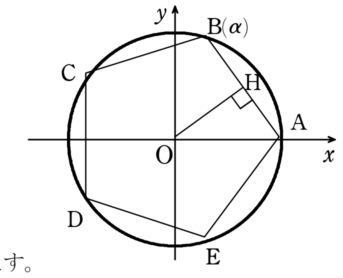
【解説】

$\boxed{1}$

問題文より、A(1), B(α)となる。

$2\pi\div5=\dfrac{2\pi}{5}$ より、$\alpha=\cos\dfrac{2}{5}\pi+i\sin\dfrac{2}{5}\pi\cdots$①

となる。



(1) ①とド･モアブルの公式より、

$\alpha^5=1 \iff \alpha^5-1=0$

$\iff(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\fallingdotseq1$より、αは$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$を満たす。

$\alpha\fallingdotseq0$より、αは$\alpha^2+\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}=0\cdots$②を満たす。

$t=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$とおく。$t^2=\alpha^2+2+\dfrac{1}{\alpha^2}\iff\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=t^2-2$ より②は

$$t^2-2+t+1=0\iff t^2+t-1=0\iff t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

となる。ここで、$|\alpha|^2=1$より、$\alpha\overline{\alpha}=1\iff\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$なので、

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}=2\cos\frac{2}{5}\pi>0$$

より、$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2) (1)の結果より、$\alpha+\overline{\alpha}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$である。これと$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=1$より

$$|\alpha-1|^2=(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)=|\alpha|^2-(\alpha+\overline{\alpha})+1=2-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

よって、$|\alpha-1|=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$

(3) OからABに下ろした垂線の足をHとする。三角形OABはOA＝OBの二等辺三角形なので、$\angle\mathrm{AOH}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{5}$である。

$\mathrm{AH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$とOA＝1を用いると

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sin\angle\mathrm{AOH}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{OA}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$\boxed{2}$

(1)

x回$(0\leqq x\leqq5)$表が出たときのA君の所持金は

$400+300\times x+(-100)\times(5-x)-40\times5=400x-300$円

である。これが元の所持金の3倍、すなわち、400×3＝1200円以上になればよいので、

$$400x-300\geqq1200\iff400x\geqq1500\iff x\geqq\frac{15}{4}$$

より、$x=4,5$に限る。

表がでる確率をpとすると、裏が出る確率は$2p$なので、$p+2p=1$ より$p=\dfrac{1}{3}$

よって、求める確率は

$$p^5+{}_5C_4p^4(1-p)=\left(\frac{1}{3}\right)^5+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}=\frac{11}{243}$$

(2−1) $y_{k-1}+y_k=\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^2+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2=\dfrac{2k^2-2k+1}{n^2}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{k-1}+y_k}{2n}=S_n=\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k^3-2k+1)$$

$$=\frac{1}{2n^3}\left\{\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)-n(n+1)+n\right\}$$

$$=\frac{1}{6n^2}\{(n+1)(2n+1)-3n-3+3\}=\frac{2n^2+1}{6n^2}$$

(2−2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{6n^2}=\frac{1}{3}$

$\boxed{3}$

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdots$① とする。

(1−1)

①を2乗すると、$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}\iff2\sin\theta\cos\theta=1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{3}$

よって、$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{3}\cdots$②

(1−2) $s=\sin\theta,c=\cos\theta$ とおくと、

$$\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}=\frac{s^3}{c^3}+\frac{c^3}{s^3}=\frac{s^6+c^6}{s^3c^3}=\frac{(s^2+c^2)(s^4-s^2c^2+c^4)}{s^3c^3}$$

$$=\frac{(s^2+c^2)\{(s^2+c^2)^2-3s^2c^2\}}{s^3c^3}\cdots③$$

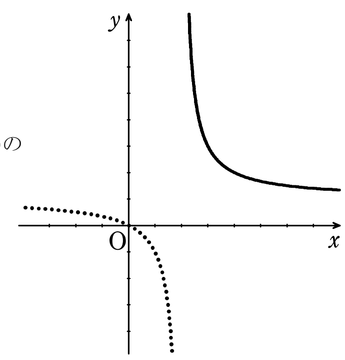
②と$s^2+c^2=1$より、

$$③=\frac{1\cdot\left\{1^2-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right\}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{27}}=-18$$

(2)

$\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{y}=1\iff\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x-a}{x}$

$\iff y=\dfrac{x}{x-a}=\dfrac{x-a+a}{x-a}=1+\dfrac{a}{x-a}\cdots$①



①は$x=a,y=1$を漸近線とし、形が$y=\dfrac{a}{x}$ $(a>0)$の双曲線である。$x>0,y>0$より右図の実線部分となり、

$$y=1+\frac{a}{x-a}=f(x)\ (x>a)\cdots②$$

となる。$x+y=k$とおく。kの取り得る範囲は直線$y=-x+k$と②が交わる条件と同じであり、kが最小となるのは②と接する時である。

$$f'(x)=\frac{-a}{(x-a)^2}=-1\iff(x-a)^2=a\iff x-a=\pm\sqrt{a}\iff x=a\pm\sqrt{a}$$

$x>a$より接点のx座標は$x=a+\sqrt{a}$となる。②に代入すると$y=1+\dfrac{a}{\sqrt{a}}=1+\sqrt{a}$となるので、$x+y$の最小値は

$$a+\sqrt{a}+1+\sqrt{a}=a+2\sqrt{a}+1=(\sqrt{a}+1)^2$$

(3) $\cos x=\cos2x=2\cos^2x-1\iff2\cos^2x-\cos x-1=0$

$\iff(2\cos x+1)(\cos x-1)=0\iff\cos x=-\dfrac{1}{2},1$

$0<x<\pi$で解くと$x=\dfrac{2}{3}\pi$となる。

$$\int_0^{\pi}|\cos x-\cos2x|dx=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}|\cos x-\cos2x|dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}|\cos x-\cos2x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos x-\cos2x)dx-\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(\cos x-\cos2x)dx$$

$$=\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}-\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin2x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(4)

$(1,3)$を通る直線の傾きをm とすると $f(x)=m(x-1)+3=mx+3-m\cdots$①となる。

$$g(m)=\int_0^2\{x^2-f(x)\}^2dx=\int_0^2\{x^2-mx+(m-3)\}^2dx$$

$$=\int_0^2\{x^4+m^2x^2+(m-3)^2-2mx^3-2m(m-3)x+2(m-3)x^2\}dx$$

$$=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{m^2x^3}{3}+(m-3)^2x-\frac{mx^4}{2}-m(m-3)x^2+\frac{2(m-3)x^3}{3}\right]_0^2$$

$$=\frac{32}{5}+\frac{8}{3}m^2+2(m-3)^2-8m-4m(m-3)+\frac{16}{3}(m-3)$$

$$g'(m)=\frac{16}{3}m+4(m-3)-8-8m+12+\frac{16}{3}=\frac{4}{3}m-\frac{8}{3}$$

$m=2$で$g(m)$は極小かつ最小。$m=2$を①に代入して、$f(x)=2x+1$

$\boxed{4}$

(1−1)　$2\sin^2 x = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{1}{4}$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $\sin x \geqq 0$ なので、$\sin x = \dfrac{1}{2}$ よって、$x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$

$x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき。$y = 2\sin^2 \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$　　$x = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき。$y = 2\sin^2 \dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{1}{2}$

よって、 交点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{1}{2}\right)$

(1−2)　$S = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} (2\sin^2 x - \cos 2x)dx \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} (1 - 2\cos 2x)dx = \Big[x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} - \Big[\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$

$= \dfrac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$

(2)

真数条件と底の条件より　$x > 0,\ y > 0,\ x \neq 1,\ y \neq 1$ … ①

$\log_x y = \log_y x = \dfrac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow (\log_x y)^2 = 1 \Leftrightarrow \log_x y = \pm 1$

(i)　$\log_x y = 1$ の時。$y = x$ …②であり、

$\log_x y = -\log_3(x+y) \Leftrightarrow 1 = -\log_3(2x) \Leftrightarrow 2x = 3^{-1} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$

②より、$y = \dfrac{1}{6}$　$(x, y) = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}\right)$ は①を満たす。

(ii)　$\log_x y = -1$ の時。$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ …③であり、

$\log_x y = -\log_3(x+y) \Leftrightarrow -1 = -\log_3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$　　③より、$y = \dfrac{2}{3 \pm \sqrt{5}} = \dfrac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$

$(x, y) = \left(\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \dfrac{3 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$ (復号同順) は①を満たす。