$\boxed{1}$

次の各問に答えよ。ただし, 答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　不等式$(\log_{0.2}x)^2 \leqq \log_{0.2}\dfrac{1}{25x}$を解け。

(2)　三角形OABにおいて, 点P, Qをそれぞれ辺OA, OB上の点とし, 線分AQとBPの交点をCとする。また、$\mathrm{OA}=1$, $\mathrm{OP}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OB}}=x\ (0<x<1)$, 線分OCは∠AOBを二等分する とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とおくとき, 次の問に答えよ。

(2−1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$および$x$を用いて表せ。

(2−2)　線分OBの長さを$x$を用いて表せ。

(3)　数列$\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$の初項から第$n$項までの和が$S_n=-n^3+18n^2-47n$により与えられている。

(3−1)　一般項$a_n$を求めよ。

(3−2)　$a_n>0$となる自然数$n$の範囲を求めよ。

(3−3)　$a_n>0$となる$a_n$について, それらの和を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{5}\leqq x \leqq 25$

(2−1)　$\dfrac{2-2x}{3-2x}\vec{a}+\dfrac{x}{3-2x}\vec{b}$　　(2−2)　$\dfrac{2-2x}{x}$

(3−1)　$-3n^2+39n-66$　(3−2)　$3\leqq n\leqq 10$　$(2<n<11)$

(3−3)　360

(解説)

(1) $\log_{0.5}\dfrac{1}{25x}=\ \log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{25x}=\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^2-\log_{\frac{1}{5}}x$

$$=2-\log_{\frac{1}{5}}x$$

より、

$$(\log_{0.2}x)^2\leqq\log_{0.2}\frac{1}{25x}\Leftrightarrow\left(\log_{\frac{1}{5}}x\right)^2\leqq 2-\log_{\frac{1}{5}}x$$

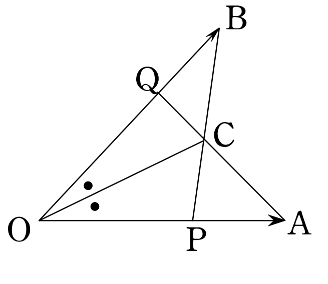
$$\Leftrightarrow\left(\log_{\frac{1}{5}}x\right)^2+\log_{\frac{1}{5}}x-2\leqq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\log_{\frac{1}{5}}x+2\right)\left(\log_{\frac{1}{5}}x-1\right)\leqq 0$$

$$\Leftrightarrow -2\leqq\log_{\frac{1}{5}}x\leqq 1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\geqq x\geqq\left(\frac{1}{5}\right)^1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{5}\leqq x\leqq 25$$

(2)(2−1)メネラウスの定理より、




$$\frac{PC}{CB}\cdot\frac{BQ}{QO}\cdot\frac{OA}{AP}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{PC}{CB}\cdot\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{PC}{CB}=\frac{x}{3(1-x)}$$　よって、PC:CB$=x:3(1-x)$となる。

これと、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3(1-x)}{x+3(1-x)}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{x}{x+3(1-x)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{2-2x}{3-2x}\vec{a}+\frac{x}{3-2x}\vec{b}$$

(2−2)角の二等分線の性質より、

OB:OP=PC:CB

$$\Leftrightarrow|\vec{b}|:\frac{2}{3}=x:3(1-x)\Leftrightarrow|\vec{b}|=\frac{2-2x}{x}$$

(3)(3−1)

$a_1=S_1=-1+18-47=-30$ ⋯ ①

$n\geqq 2$のとき、

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(-n^3+18x^2-47n)-\{-(n-1)^3+18(n-1)^2-47(n-1)\}$

$=-3n^2+39n-66$

これに$n=1$を代入すると、$-3+39-69=-30$となり

①と一致する。よって、$a_n=-3n^2+39n-66$

(3−2)　$a_n=-3n^2+39n-66<0$より、$3(n-2)(n-11)<0$

よって、$2<n<11$

【注意】

$n$は自然数なので、$3\leqq n\leqq 10$と答えてもよい。

(3−3)

$$\sum_{k=3}^{10}a_n=S_{10}-S_2=330-(-30)=360$$

$\boxed{2}$

2次関数$f(x)=x^2-2ax+2a+3$がある。ただし, $a$は実数の定数である。次の各問に答えよ。ただし, (1)と(2)の答は, 結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　放物線$y=f(x)$は$a$の値によらない定点を通る。この定点の座標を求めよ。

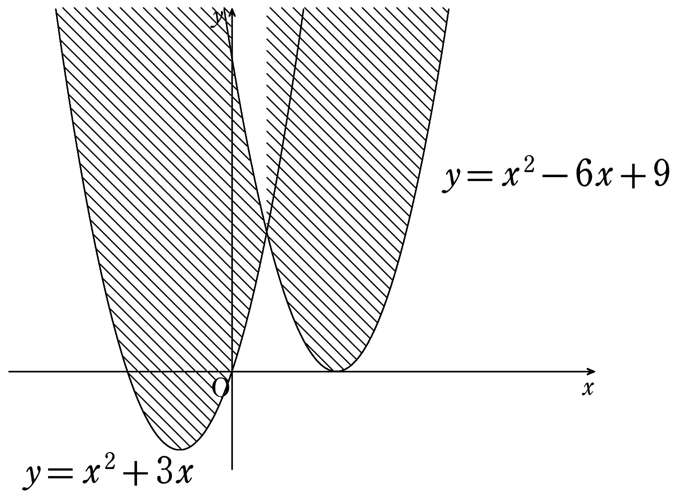
(2)　$x\geqq 0$において必ず$f(x)\geqq 0$となるような$a$の値の範囲を求めよ。

(3)　$a$が(2)で求めた範囲を変わるとき, 放物線$y=f(x)$が通る範囲を図示せよ。

(1)　$(1, 4)$

(2)　$-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 3$

(3)　下図の斜線部分ただし境界は全て含む。




解説

(1)　$y=x^2-2ax+2a+3$を$a$について整理すると

$$2(x-1)a+(y-x^2-3)=0$$

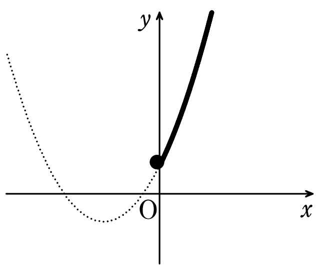
となる。これが任意の$a$に対して常に成り立てば良いので、

$\begin{cases} x-1=0 \\ y-x^2-3=0 \end{cases}$ よって、$(x, y)=(1, 4)$

(2) $y=x^2-2ax+2a+3$

$=(x-a)^2-a^2+2a+3$

頂点は$(a, -a^2+2a+3)$である。

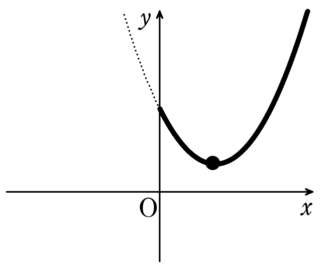



(i)　$a<0$のとき

$x\geqq 0$で常に$f(x)\geqq 0$となる条件は$f(0)\geqq 0$ である。

$f(0)=2a+3\geqq 0 \Leftrightarrow a\geqq -\dfrac{3}{2}$　よって、$-\dfrac{3}{2}\leqq a<0$

(ii) $a\geqq 0$のとき




$x\geqq 0$で常に$f(x)\geqq 0$となる条件は$f(a)\geqq 0$である。

$f(a)=-a^2+2a+3\geqq 0$

$\Leftrightarrow (a+1)(a-3)\leqq 0$

$\Leftrightarrow -1\leqq a\leqq 3$よって、$0\leqq a\leqq 3$

以上より、求める条件は$-\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 3$ となる。

(3)　$y=x^2-2ax+2a+3$より、

$2(x-1)a=x^2+3-y$…①

(i)　$x=1$のとき

①より、$0=1+3-y \Leftrightarrow y=4$ よって、$(x, y)=(1,4)$

(ii)　$x\fallingdotseq 1$のとき

① $\Leftrightarrow a=\dfrac{x^2+3-y}{2(x-1)}$ となるので、

$\dfrac{-3}{2}\leqq\dfrac{x^2+3-y}{2(x-1)}\leqq 3$　即ち　$-3\leqq\dfrac{x^2+3-y}{x-1}\leqq 6$ …②

が成り立てば良い。

(A)　$x>1$のとき、

② $\Leftrightarrow -3(x-1)\leqq x^2+3-y\leqq 6(x-1)$

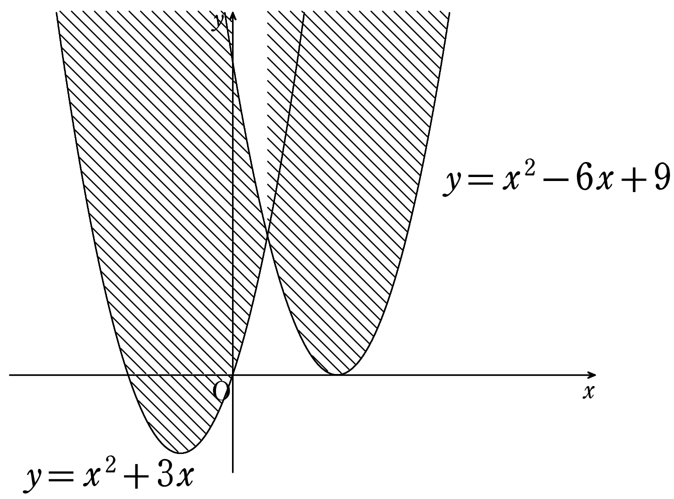
$\Leftrightarrow \begin{cases} y\leqq x^2+3x \\ y\geqq x^2-6x+9 \end{cases}$

(B)　$x<1$のとき、

② $\Leftrightarrow -3(x-1)\geqq x^2+3-y\geqq 6(x-1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geqq x^2+3x \\ y\leqq x^2-6x+9 \end{cases}$

以上より、求める領域は下図の斜線部分ただし境界は全て含む。



$\boxed{3}$

次の各問に答えよ。ただし, 答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 白球3個と黒球5個が入っている袋から同時に3個の球を取り出す。ただし, どの球を取り出す確率も同じとする。次の問いに答えよ。

(1−1) すべて白球となる確率を求めよ。

(1−2) 白球が2個, 黒球が1個となる確率を求めよ。

(1−3) $a, b$は正の数とし, 白球があれば1個につき$a$点, 黒球があれば1個につき$-b$点の点数を与えて, 合計点の期待値が0点となるようにする。このとき, $\dfrac{a}{b}$の値を求めよ。

(2) 2二次方程式$x^2-5ax+a^2=0$ ($a$は正の定数)の2つの解がある$\theta$により、$\sin^4\theta, \cos^4\theta$と表せるとき, $a$の値を求めよ。

(3) 直線$x=\dfrac{1}{2}$を原点を中心として負の向きに30°回転して得られる直線の方程式を求めよ。

(1−1) $\dfrac{1}{56}$ (1−2) $\dfrac{15}{56}$ (1−3) $\dfrac{5}{3}$

(2) $a=\dfrac{1}{7}$ (3) $y=\sqrt{3}x-1$

(解説)

(1) 白球を$k$個取り出す確率を$P_k$とする。

(1−1) $P_3=\dfrac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\dfrac{1}{56}$

(1−2) $P_2=\dfrac{{}_3C_2\cdot{}_5C_1}{{}_8C_3}=\dfrac{3\cdot5}{56}=\dfrac{15}{56}$

(1−3) $P_1=\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_5C_2}{{}_8C_3}=\dfrac{3\cdot10}{56}=\dfrac{30}{56}$ $P_0=\dfrac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\dfrac{10}{56}$

よって確率分布表は以下のようになる。

| $X$ | $3a$ | $2a-b$ | $a-2b$ | $-3b$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{1}{56}$ | $\dfrac{15}{56}$ | $\dfrac{30}{56}$ | $\dfrac{10}{56}$ |

よって、期待値は

$$E=3a\cdot\frac{1}{56}+(2a-b)\cdot\frac{15}{56}+(a-2b)\cdot\frac{30}{56}+(-3b)\cdot\frac{10}{56}$$

$$=\frac{9}{8}a-\frac{15}{8}b$$

$E=\dfrac{9}{8}a-\dfrac{15}{8}b=0$より、$\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{3}$

【別解】

出現確率を利用して期待値を求めても良い。

どの球も取り出される確率は$\dfrac{3}{8}$であるから、求める期待値は

$$E=a\cdot\frac{3}{8}\cdot3+(-b)\cdot\frac{3}{8}\cdot5=\frac{9}{8}a-\frac{15}{8}b$$

(2) $x^2-5ax+a^2=0$で解と係数の関係より

$$\begin{cases}\sin^4\theta+\cos^4\theta=5a & \cdots ① \\ \sin^4\theta\cos^4\theta=a^2 & \cdots ②\end{cases}$$

$a>0$に注意すると、② $\Leftrightarrow \sin^2\theta\cos^2\theta=a$ ⋯③

①と③より、

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\Leftrightarrow 5a=1-2a \Leftrightarrow a=\frac{1}{7}$$

(3) $x=\dfrac{1}{2}$を原点を中心に−30°回転させた直線は下の右図のようになる。Oから直線に下ろした垂線の足をHとすると

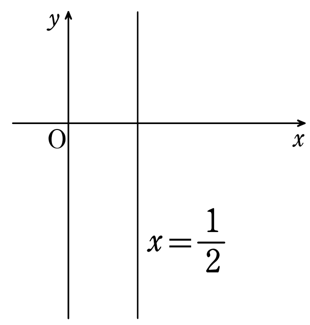
$\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2}$であり、$\angle\mathrm{AOH}=30°$である。

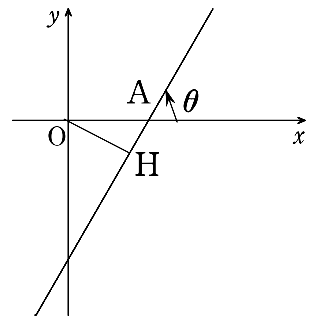
$$\mathrm{OA}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{OH}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

より、$A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$となる。また、$\theta=\angle\mathrm{OAH}=60°$であるから

求める直線の傾きは$\tan60°=\sqrt{3}$となる。よって、

$$y=\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow y=\sqrt{3}x-1$$




【別解】

$x=\dfrac{1}{2}$上の点$P\left(\dfrac{1}{2}, t\right)$を−30°回転させた点を$Q(X,Y)$とおく。

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos30° & -\sin30°\\ \sin30° & \cos30°\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

よって、$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}X-Y) \Leftrightarrow Y=\sqrt{3}X-1$ となる。

よって、求める直線の式は$y=\sqrt{3}x-1$

$\boxed{4}$

次の各問に答えよ。ただし, (1)の答は, 結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　実数$a>0$に対し, $F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|a\cos x-\sin x|dx$とおく。

　(1−1)　$F(1)$の値を求めよ。

　(1−2)　$a$の関数$F(a)$の最小値を求めよ。

(2)　関数$f(x)=x\sin(\log x)$ $(1\leqq x\leqq e^{\pi})$について次の問に答えよ。ただし, log は自然対数を表す。

(2−1)　$f(x)$の導関数$f'(x)$を求めよ。

(2−2)　$f(x)$の最大値を求めよ。

(1−1)　$2\sqrt{2}-2$　　(1−2)　$\sqrt{3}-1$

(2−1)　$\sin(\log x)+\cos(\log x)$　(2−2)　$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$

解説

(1)(1−1)

$\cos x-\sin x=0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$を解くと、$x=\frac{\pi}{4}$となる。

$$F(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\cos x-\sin x|dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx$$

$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\Big[\sin x+\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

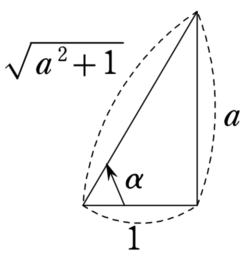
$$=(\sqrt{2}-1)-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$$

(1−2)

$a\cos x-\sin x=0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$の解を$\alpha$とすると、

$a\cos\alpha-\sin\alpha=0\Leftrightarrow\tan\alpha=a$

よって、$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\\ \sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}\end{cases}$となる。




$$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|a\cos x-\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\alpha}|a\cos x-\sin x|dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}|a\cos x-\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\alpha}(a\cos x-\sin x)dx-\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(a\cos x-\sin x)dx$$

$$=\Big[a\sin x+\cos x\Big]_0^{\alpha}-\Big[a\sin x+\cos x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2a\sin\alpha+2\cos\alpha-1-a$$

$$=\frac{2(a^2+1)}{\sqrt{a^2+1}}-1-a=2\sqrt{a^2+1}-1-a$$

$$F'(a)=2\cdot\frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}}-1=\frac{2a-\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$F'(a)=0\Leftrightarrow 2a=\sqrt{a^2+1}\Leftrightarrow 4a^2=a^2+1\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{3}$$

$a>0$より、$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$であり、ここで、$F(a)$は極小かつ最小となる。

$$\text{最小値}=F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{\frac{1}{3}+1}-1-\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$$

(2)(2−1)　積の微分法より、

$$f'(x)=1\cdot\sin(\log x)+x\cdot\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\sin(\log x)+\cos(\log x)$$

(2−2)

$\log x=X$とおく。$1\leqq x\leqq e^{\pi}$より、$0\leqq X\leqq\pi$となる。

$f'(x)=0\Leftrightarrow\sin X+\cos X=0$

$\Leftrightarrow\tan X=-1\Leftrightarrow X=\frac{3}{4}\pi$

$\log x=\frac{3}{4}\pi$より、$x=e^{\frac{3}{4}\pi}$となる。

よって、$f(x)$は$x=e^{\frac{3}{4}\pi}$で極大かつ最大となる。

$$\text{最大値}=f\left(e^{\frac{3}{4}\pi}\right)=e^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$$