

1
次の各問に答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。
(1) $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ のとき、次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 3\sin x + \cos y = 2\sqrt{3} \\ 3\cos x + \sin y = 2 \end{cases}$$

- (2) a, b は自然数で $a < b$ とする。
(2-1) a と b の間にあり、7 を分母とする全ての有理数のうち、
整数ではないものの個数を求めよ。
(2-2) a と b の間にあり、7 を分母とする全ての有理数のうち、
整数ではないものの総和を求めよ。
(3) 1 つのさいころを何回か投げて、出た目の数の和が4 以上に
なったらそこで投げることを終了する。
(3-1) 1 回目で終了する確率を求めよ。
(3-2) 3 回目で終了する確率を求めよ。
(3-3) 投げる回数の期待値を求めよ。

(答) (1) $(x, y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ (2) (2-1) $6(b-1)$ (2-2) $3(b^2 - a^2)$

(3) (3-1) $\frac{1}{2}$ (3-2) $\frac{17}{216}$ (3-3) $\frac{343}{216}$

解説

$$(1) \begin{cases} 3\sin x + \cos y = 2\sqrt{3} & \cdots \textcircled{1} \\ 3\cos x + \sin y = 2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad (0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi)$$

①, ②より

$$(3\sin x + \cos y)^2 + (3\cos x + \sin y)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2$$

$$\Leftrightarrow 10 + 6(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = 16$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1 \Leftrightarrow \sin(x + y) = 1$$

$$0 \leq x + y \leq 2\pi \text{ より } x + y = \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 3\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 4\sin x = 2\sqrt{3} \text{ より、} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ と } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ と } x + y = \frac{\pi}{2} \text{ より、} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ ゆえ } x = \frac{\pi}{3}$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

(2) k を自然数とする。 k と $k+1$ の間の分母が7 の既約分数は

$$k + \frac{1}{7}, k + \frac{2}{7}, k + \frac{3}{7}, k + \frac{4}{7}, k + \frac{5}{7}, k + \frac{6}{7} \text{ の } 6 \text{ 個である。}$$

(2-1) a から b までの分数の個数は $6(b-a)$ 個である。

(2-2)

$$\left(k + \frac{1}{7}\right) + \left(k + \frac{2}{7}\right) + \left(k + \frac{3}{7}\right) + \left(k + \frac{4}{7}\right) + \left(k + \frac{5}{7}\right) + \left(k + \frac{6}{7}\right) = 6k + 3$$

求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{b-1} (6k+3) &= \sum_{k=1}^{b-1} (6k+3) - \sum_{k=1}^{a-1} (6k+3) \\ &= 3(b-1)b + 3(b-1) - \{3(a-1)a + 3(a-1)\} = 3(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

(3)

$$(3-1) \text{ 1 回目で } 4 \text{ か } 5 \text{ か } 6 \text{ が でればよいので、} P_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(3-2) 3 回目でちょうど終了するのは以下の3通り。

	1回目	2回目	3回目
A	1	1	2以上
B	1	2	1以上
C	2	1	1以上

$$\text{よって、} P_3 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{6}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{6}{6} = \frac{17}{216}$$

(3-3) 4 回目でちょうど終了するのは1 回目から3 回目まで1 で、4 回目は
どの目がでて

$$\text{よいので、} P_4 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{216}$$

$$E = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 = P_1 + 2(1 - P_1 - P_3 - P_4) + 3P_3 + 4P_4$$

$$= 2 - P_1 + P_3 + 2P_4 = 2 - \frac{1}{2} + \frac{17}{216} + \frac{2}{216} = \frac{343}{216}$$

備考(3) 2009 年センター試験とほぼ同様の問題でした。

2

三角形ABC は $AB=4, AC=1, \angle BAC=120^\circ$ を満たしている。

また、点P は正の数 m により $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + m\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ を満たすように
定められているとし、直線AP と直線BC の交点をD とする。

次の各問に答えよ。

(1) 比BD:DC を m を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{BC}$ が垂直のとき、 m の値を求めよ。

(3) m は(2) で求めた数とする。また、点Q を正の数 n により
 $\overrightarrow{AQ} = n\overrightarrow{AD}$ を満たすように定める。点Q が三角形ABC の
外接円の周上にあるとき n の値を求めよ。

(答) (1) $m:1$ (2) 6 (3) $\frac{11}{2}$

解説

$$(1) \begin{aligned} 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + m\overrightarrow{PC} &= \vec{0} \text{ から} \\ -3\overrightarrow{AP} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + m(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } (m+4)\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$$

$$m+4 \neq 0 \text{ であるから } \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}}{m+4}$$

点D は直線 AP 上にあるから

$$\overrightarrow{AD} = k \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}}{m+4} \text{ とおける。}$$

$$D \text{ は } BC \text{ 上なので、} \frac{k}{m+4} + \frac{km}{m+4} = 1 \text{ ゆえ、} k = \frac{m+4}{m+1}$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{AD} = \frac{m+4}{m+1} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}}{m+4} = \frac{\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}}{m+1}$$

$$\text{よって } BD : DC = \frac{m}{m+1} : \frac{1}{m+1} = m : 1$$

$$(2) (1) \text{ と } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC} \text{ から } \frac{\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}}{m+1} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\text{ゆえに } -|\overrightarrow{AB}|^2 + (1-k)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + m|\overrightarrow{AC}|^2 = 0$$

$$\text{ここで、} |\overrightarrow{AB}|=4, |\overrightarrow{AC}|=1, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 1 \times \cos 120^\circ = -2$$

であるから

$$-4^2 + (1-k) \cdot (-2) + m \cdot 1^2 = 0 \Leftrightarrow -18 + 3m = 0 \text{ ゆえに } m = 6$$

$$(3) |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2$$

$$= 4^2 - 2(-2) + 1^2 = 21$$

$$\text{ゆえに } BC = \sqrt{21} \text{ (1), (2) より } BD : DC = 6 : 1 \text{ であるから}$$

$$BD = \frac{6\sqrt{21}}{7}, DC = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ ゆえに、三平方の定理から}$$

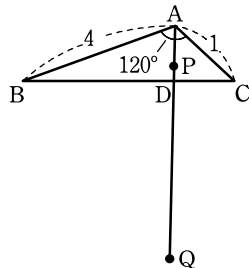
$$AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{1 - \frac{21}{49}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

方べきの定理により $AD \cdot DQ = BD \cdot DC$ であるから

$$\frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot DQ = \frac{6\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{ゆえに } DQ = \frac{9\sqrt{7}}{7} \quad n = \frac{AQ}{AD} = \frac{\frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{9\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = \frac{11}{2}$$

備考 2001 年鹿児島大学と数字が違うだけの問題でした。



3

次の各問に答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

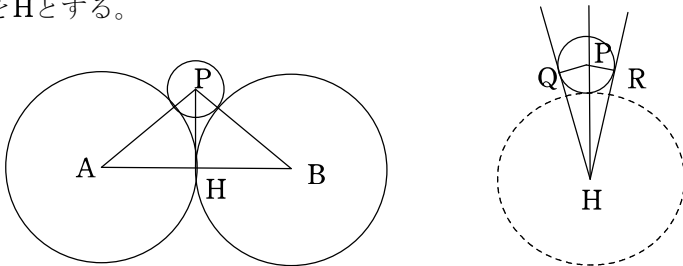
- (1) 半径1の球が2つ接している。この2つの球のいずれにも接するように半径 r の球を12個おき、しかも12個の球がすべて両端とも接するようにしたい。このような r の値を求めよ。
- (2) 不等式 $(0.8)^n < 0.001$ が成立するような整数 n の最小値を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

- (3) 座標空間において行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ で表される1次変換が与えられている。この変換によって自分自身にうつる直線をすべて求めよ。

(答) (1) $14 - 8\sqrt{3}$ (2) 31 (3) $y = -2x, y = -x$

解説

- (1) 半径1の球の中心をAとBとする。求める球の半径を r としその1つ球の中心をPとする。PからABに下ろした垂線の足をHとする。



AH=1, AP=1+rに注意して三平方の定理より、

$$PH = \sqrt{(1+r)^2 - 1^2} = \sqrt{r^2 + 2r}$$

また、12個の球はHを中心とする半径 $\sqrt{r^2 + 2r} - r$ の球に接している。

右上図のように、Q,Rを定めると、 $\angle QHR = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ であり、

$\angle PHQ = 15^\circ$ となる。

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{であり、}$$

$$\sin \angle PHQ = \frac{PQ}{HP} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 2r}}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)\sqrt{r^2 + 2r} = 2\sqrt{2}r$$

両辺を二乗すると $(4 - 2\sqrt{3})(r^2 + 2r) = 8r^2$ となり、 $2r > 0$ でわると

$$(2 - \sqrt{3})(r + 2) = 4r \quad \text{ゆえ、} r = 14 - 8\sqrt{3}$$

$$(2) \left(\frac{8}{10}\right)^n < \frac{1}{1000} \quad \text{常用対数をとると、}$$

$$n(3\log_{10} 2 - \log_{10} 10) < -3\log_{10} 10$$

$$\Leftrightarrow -0.097n < -3 \Leftrightarrow n > \frac{3}{0.097} = 30.9 \dots$$

従って、整数 n の最小値は31

- (3) $x = k$ (k は定数)の形の直線の方ベクトルは(0,1)であり、

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} \not\propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{これから} x = k \text{ の形の直線は不適。}$$

$y = mx + n$ 上の点を $(t, mt + n)$ とする。この像は

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ mt + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2m)t - 2n \\ (4 + 7m)t + 7n \end{pmatrix}$$

この点が $y = mx + n$ 上にあれば良いので、

$$(4 + 7m)t + 7n = m[(1 - 2m)t - 2n] + n$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2 + 3m + 2)t + 6n - 2mn = 0$$

が任意の t に対して成り立てば良いので、 $\begin{cases} m^2 + 3m + 2 = 0 & \dots \text{①} \\ 6n - 2mn = 0 & \dots \text{②} \end{cases}$

①より、 $(m + 2)(m + 1) = 0$ ゆえ、 $m = -2, -1$

(イ) $m = -2$ の時、②より $n = 0$

(ロ) $m = -1$ の時、②より $n = 0$

以上より、 $y = -2x$ と $y = -x$

4

次の各問に答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1) $\int_0^\pi e^{-x} \sin x \cos x \, dx$ の値を求めよ。

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} (1 + 3x)^n \, dx$ を求めよ。

(3) 次の問に答えよ。

- (3-1) 2つの放物線 $y = ax^2$ および $y^2 = bx$ によって囲まれる部分の面積 S_1 を求めよ。ただし、 a, b は正の定数とする。

- (3-2) 次の4つの不等式 $y \leq kx^2, y \geq x^2, y^2 \geq kx, y^2 \leq 5x$ を同時に満たす点 (x, y) の存在する領域の面積 S_2 を求めよ。ただし、 k は $1 < k < 5$ を満たす定数とする。

- (3-3) (3-2)の S_2 を最大にする定数 k の値を求めよ。

$$(答) (1) \frac{1}{5}(1 - e^{-\pi}) \quad (2) \frac{1}{3}(e^3 - 1)$$

$$(3)(3-1) \frac{b}{3a} \quad (3-2) 2 - \left(\frac{k}{3} + \frac{5}{3k}\right) \quad (3-3) k = \sqrt{5}$$

解説

$$(1) \int_0^\pi e^{-x} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x \, dx \dots \text{①}$$

$$\{e^{-x} \sin 2x\}' = -e^{-x} \sin 2x + 2e^{-x} \cos 2x \dots \text{②}$$

$$\{e^{-x} \cos 2x\}' = -e^{-x} \cos 2x - 2e^{-x} \sin 2x \dots \text{③}$$

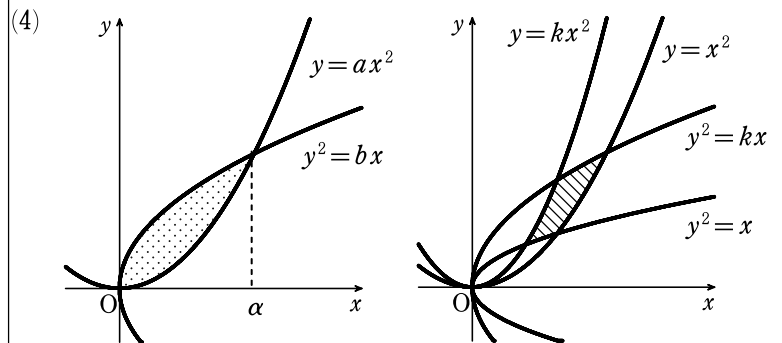
$$\text{②} + \text{③} \times 2 \text{ より、} \{e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x)\}' = -5e^{-x} \sin 2x \quad \text{ゆえ、}$$

$$\text{①} = -\frac{1}{10} \left[e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x) \right]_0^\pi = -\frac{1}{10} (2e^{-\pi} - 2) = \frac{1}{5} (1 - e^{-\pi})$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} (1 + 3x)^n \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} \left[(1 + 3x)^{n+1} \right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} \cdot \left\{ \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1} - 1 \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} \left[\left\{ \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}} \right\}^3 \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right) - 1 \right] = \frac{1}{3} (e^3 - 1)$$



$$(4-1) \begin{cases} y = ax^2 & \dots \text{①} \\ y^2 = bx & \dots \text{②} \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\text{①を②に代入すると} a^2 x^4 = bx \Leftrightarrow x(a^2 x^3 - b) = 0$$

よって、交点の x 座標は $x = 0, \sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$ となる。 $\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$ とおく。

S_1 は左上図の塗られている部分である。

$$S_1 = \int_0^\alpha (\sqrt{bx} - ax^2) \, dx = \left[\frac{2\sqrt{b}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{a}{3} x^3 \right]_0^\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{3} \alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{a}{3} \alpha^3$$

$$= \frac{2b}{3a} - \frac{b}{3a} = \frac{b}{3a}$$

(4-2)

$$S_2 = (y = x^2 \text{と} y^2 = 5x \text{が囲む部分}) - (y = x^2 \text{と} y^2 = kx \text{が囲む部分})$$

$$- (y = kx^2 \text{と} y^2 = 5x \text{が囲む部分}) + (y = kx^2 \text{と} y^2 = kx \text{が囲む部分})$$

$$= \frac{5}{3 \cdot 1} - \frac{k}{3 \cdot 1} - \frac{5}{3 \cdot k} + \frac{k}{3 \cdot k} = 2 - \frac{1}{3} \left(k + \frac{5}{k} \right)$$

(4-3) 相加相乗平均の不等式より、

$$S_2 = 2 - \frac{1}{3} \left(k + \frac{5}{k} \right) \leq 2 - \frac{2}{3} \sqrt{k \cdot \frac{5}{k}} = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

等号成立条件は $k = \frac{5}{k}$ より、 $k^2 = 5$ であり、 $1 < k < 5$ より $k = \sqrt{5}$

従って、 S_2 の最大値は $2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$ であり、その時の k の値は $\sqrt{5}$ である。

【講評】

I期と形式・出題分野も同一である。

ただし、I期よりも計算量は多く、難易度もやや上がっている。

試験時間を考えると、問題量の多さに受験生は苦しめられたと思う。

解ける問題を選ぶという作業も必要であったと思われる。

時間・問題量を考えると、正規合格ラインはI期より下がり65%程度と思われる。