

Windom の解答速報 日本医科大学(医) 数学

1

問1

(1) $\sqrt{6}$ (2) 45° (3) $\sqrt{2}$ (4) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}$

問2

(1) 3360 (2) $m=550$

問3

(1) $\pm 2\sqrt{3}$ (2) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

2

問1 $f'(x) = xe^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-1}$ 問2 $f(x) \geq g(x)$ 等号成立は $x=1$ に限る

問3 略

3

問1 $y = \frac{4t-2}{5}(x-t) + t^2$ ($t-5 \leq x \leq t$) 問2 略

1

問1

(1) 三角形ABDで余弦定理より

$$BD^2 = (1+\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot (1+\sqrt{3}) \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 6$$

$$BD > 0 \text{ より、} BD = \sqrt{6}$$

(2) 三角形ABDで余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle ABD &= \frac{(1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \cdot (1+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}} \\ &= \frac{6+2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$0^\circ < \angle ABD < 180^\circ \text{ より、} \angle ABD = 45^\circ$$

【別解】

三角形ABDで正弦定理より

$$\frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{\sin \angle BAD} \Leftrightarrow \sin \angle ABD = \frac{AD}{BD} \sin \angle BAD = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ < \angle ABD < 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ より、} \angle ABD = 45^\circ$$

(3) $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ より、 $\angle PAB = \angle PAD$ ゆえ、角の二等分線の性質より

BP:PD=BA:AD=1+ $\sqrt{3}$:2 である。よって、

$$BP = \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+2} BD = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

(4) 三角形BCDはCB=CDの二等辺三角形でCQは $\angle BCD$ の角の二等分線なので、

CQとBDは直交しRはBDの中点である。よって、 $BR = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{6}}{2}$ となる。

$$PR = BP - BR = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ また、三角形BRQは直角二等辺三角形なので、}$$

$$QR = BR = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ となる。三角形PQRで三平方の定理より、}$$

$$QR = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

内接円の半径を r とすると、三角形PQRの面積 = $\frac{r}{2}(QR+RP+PQ)$ ゆえ

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) = \frac{r}{2} \left\{ \frac{\sqrt{6}}{2} + \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) + \sqrt{5-2\sqrt{3}} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}-3}{4} = \frac{r}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{5-2\sqrt{3}})$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{2\sqrt{3}-3}{2(\sqrt{2} + \sqrt{5-2\sqrt{3}})} = \frac{(2\sqrt{3}-3)(\sqrt{2} - \sqrt{5-2\sqrt{3}})}{2\{2-(5-2\sqrt{3})\}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}$$

問2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=3k-2) \\ 2 & (n=3k-1) \\ 0 & (n=3k) \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 1 & (n=3k-2) \\ 1 & (n=3k-1) \\ 0 & (n=3k) \end{cases} \text{ である。}$$

$$(1) \quad a_n + b_n = \begin{cases} 1+1=2 & (n=3k-2) \\ 2+1=3 & (n=3k-1) \\ 0+0=0 & (n=3k) \end{cases} \text{ より、3個ずつの和は } 2+3+0=5 \text{ となる。}$$

$$2016 \div 3 = 672 \text{ より、} \sum_{n=1}^{2016} (a_n + b_n) = 5 \times 672 = 3360$$

$$(2) \quad a_{n+2} + b_{n+1} + 2a_n = \begin{cases} 0+1+2 \cdot 1=3 & (n=3k-2) \\ 1+0+2 \cdot 2=5 & (n=3k-1) \\ 2+1+2 \cdot 0=3 & (n=3k) \end{cases} \text{ より、3個ずつの和は } 3+5+3=11$$

となる。

$$2016 \div 11 = 183 + 3 \text{ より、} m = 3 \times 183 + 1 = 549 + 1 = 550 \text{ 番目}$$

問3

$$(1) \quad 3x - 4y + k = 0 \Leftrightarrow 4y = 3x + k \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = -1 \text{ を48倍すると}$$

$$12x^2 - 16y^2 = -48$$

これに①を代入すると

$$12x^2 - (3x+k)^2 = -48$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 6kx + 48 - k^2 = 0$$

判別式 $= D = 0$ より、

$$\frac{D}{4} = (3k)^2 - 3 \cdot (48 - k^2) = 12k^2 - 3 \cdot 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 3 \cdot 4 = 12 \Leftrightarrow k = \pm 2\sqrt{3}$$

(2) C 上の点と ℓ_0 の距離の最小値 $= \ell_{\pm 2\sqrt{3}}$ と ℓ_0 の距離 $= \ell_{\pm 2\sqrt{3}}$ と $(0,0)$ の距離。

$\ell_{\pm 2\sqrt{3}}$: $3x - 4y \pm 2\sqrt{3} = 0$ と点 $(0,0)$ の距離は

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \pm 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

2

$$\text{問1} \quad f(x) = \int_1^x t(x-t+1)e^{-(x-t+1)^2} dt$$

$$x-t+1=s \Leftrightarrow t=x+1-s \text{ とおく。} dt=(-1)dx \text{ であり積分区間は}$$

なる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x t(x-t+1)e^{-(x-t+1)^2} dt = \int_x^1 (x+1-s)se^{-s^2} \cdot (-1)ds \\ &= \int_1^x (x+1-s)se^{-s^2} ds = (x+1) \int_1^x se^{-s^2} ds - \int_1^x s^2 e^{-s^2} ds \end{aligned}$$

両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \int_1^x se^{-s^2} ds + (x+1)xe^{-x^2} - x^2e^{-x^2} = \int_1^x se^{-s^2} ds + xe^{-x^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[e^{-s^2} \right]_1^x + xe^{-x^2} = xe^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{問2} \quad g(x) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-x^2}) \text{ に対して } h(x) = f(x) - g(x) \text{ とおく。}$$

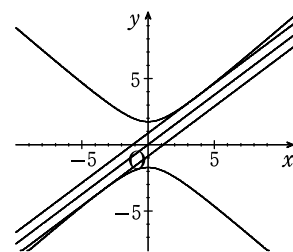
$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = xe^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}\{0 - (-2x)e^{-x^2}\} = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-x^2})$$

となる。 $h'(x)=0$ を解くと $-x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1$ と $x > 0$ より、 $x=1$ となる。

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$			$h(1)$	$\nearrow$

増減表より $h(x)$ は $x=1$ で極小かつ最小となる。 $h(x) \geq h(1) = f(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$

ゆえ、 $x > 0$ で $f(x) \geq g(x)$ が成り立つ。等号成立は $x=1$ に限る。

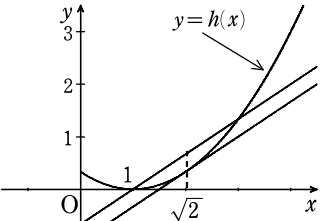


問3 $0.367 < e^{-1} < 0.368$, $0.135 < e^{-2} < 0.136$ より
 $0.367 - 0.136 < e^{-1} - e^{-2} < 0.368 - 0.135 \Leftrightarrow 0.231 < e^{-1} - e^{-2} < 0.233$
 が成り立つことに注意する。
 問2の結果より

$$f(\sqrt{2}) > g(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-2})$$

$$> \frac{1}{2} \cdot 0.231 = 0.1155 > 0.115$$

 が成り立つ。
 $x > 0$ のとき、 $h''(x) = xe^{-x^2} > 0$ なので、
 $y = h(x)$ は下に凸な曲線なので、 $(\sqrt{2}, h(\sqrt{2}))$ における接線以上に、 $y = h(x)$ のグラフは
 ある。よって、 $(1, 0)$ を通り傾きが $h'(\sqrt{2}) = f'(\sqrt{2}) - g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-2})$ の直線



$$y = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-2})(x - 1)$$

より下に点 $(\sqrt{2}, h(\sqrt{2}))$ はある。 $m(x) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-2})(x - 1)$ とおくと

$$h(\sqrt{2}) < m(\sqrt{2}) \Leftrightarrow f(\sqrt{2}) - g(\sqrt{2}) < \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-2})(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{2}) < \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-2}) + \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-2})(\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-1} - e^{-2})$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{2}) < \frac{1.415}{2} \cdot 0.233 = 0.1648475 < 0.165 \quad \text{よって、題意成立。}$$

3

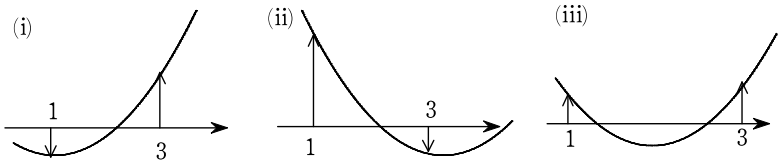
問1 PQの傾き $=\frac{t^2 - (t^2 - 4t + 2)}{t - (t - 5)} = \frac{4t - 2}{5}$ より、PQの式は

$$y = \frac{4t - 2}{5}(x - t) + t^2 \dots \textcircled{1}$$

 となる。また、
 Q の x 座標 $=t - 5 < P$ の x 座標 $=t$
 に注意すると、線分PQの定義域は $t - 5 \leq x \leq t$ となる。
 問2 $P(t, t^2)$ は $y = x^2$ 上で $1 \leq t \leq 3$ より、

$$y = x^2 (1 \leq x \leq 3) \dots \textcircled{2}$$

 の部分が境界となる。 $\begin{cases} x = t - 5 \\ y = t^2 - 4t + 2 \end{cases}$ とおくと
 $y = (x + 5)^2 - 4(x + 5) + 2 = x^2 + 6x + 7 = (x + 3)^2 - 2$
 であり、 $1 \leq t \leq 3$ より、 $-4 \leq x \leq -2$ であるから、
 $y = x^2 + 6x + 7 (-4 \leq x \leq -2) \dots \textcircled{3}$
 の部分が境界となる。
 ①を t について整理すると、
 $5y = (4t - 2)(x - t) + 5t^2 \Leftrightarrow t^2 + (4x + 2)t - 2x - 5y = 0 \dots \textcircled{4}$
 となる。直線PQの通過する領域は④が $1 \leq t \leq 3$ に少なくとも1つ実数解を持つ
 条件と同値である。 $f(t) = t^2 + (4x + 2)t - 2x - 5y$ とおく。



(i) $f(1) \geq 0$ かつ $f(3) \leq 0$ の時。
 $f(1) = 1 + 4x + 2 - 2x - 5y = 2x - 5y + 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$
 $f(3) = 9 + 12x + 6 - 2x - 5y = 10x - 5y + 15 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 2x + 3$
 よって、 $y \leq \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$ かつ $y \geq 2x + 3 \dots \textcircled{5}$

(ii) $f(1) \leq 0$ かつ $f(3) \geq 0$ の時。
 (i)の不等号を反転して $y \geq \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$ かつ $y \leq 2x + 3 \dots \textcircled{6}$

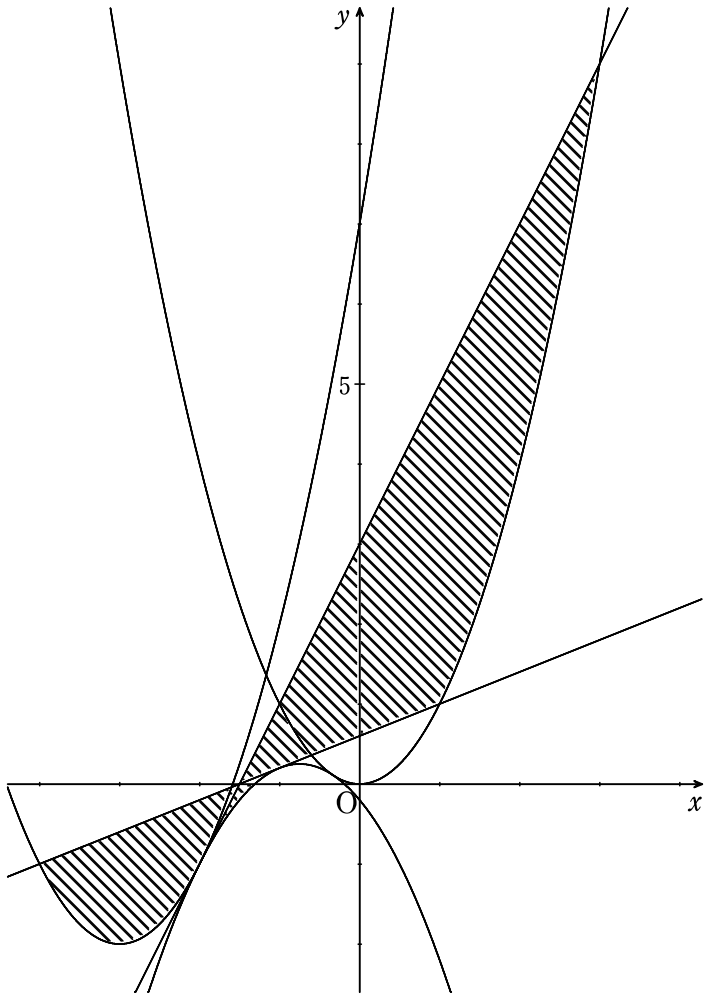
(iii) $f(1) \geq 0$ かつ $f(3) \geq 0$ の時。
 (i),(ii)の結果より、 $y \leq \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$ かつ $y \leq 2x + 3 \dots \textcircled{7}$

$f'(t) = 2t + (4x + 2) = 0$ より、軸は $t = -(2x + 1)$ となる。 $1 \leq t \leq 3$ より、
 $1 \leq -(2x + 1) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \geq 2x + 1 \geq -3 \Leftrightarrow -2 \geq 2x \geq -4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1 \dots \textcircled{8}$
 $f(t) = 0$ の判別式 $= D \geq 0$ より

$$\frac{D}{4} = (2x + 1)^2 - (-2x - 5y) = 4x^2 + 6x + 5y + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \geq -\frac{4}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{1}{5} \Leftrightarrow y \geq -\frac{4}{5}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \dots \textcircled{9}$$

①,②と⑤,⑥,⑦,⑧,⑨より求める線分PQの通過する領域は図の斜線部分。
 境界は全て含む。



総評

[1]は3題の小問集合、[II], [III]は大問となっている。
 1 三角比&平面図形
 (2) 合同式を利用する数列の和の問題
 (3) 双曲線の接線&最短距離
 [2] 積分方程式と関数の大小比較
 さらに近似計算
 [3] 線分の通過領域。

[1]の3題は確保したい。[3]の通過領域類題の経験があると思われる。[II]は前半まで得点できればよいと思われる。
 しかし現実には厳しく、50%確保が合格ラインと思われる。