2014年2月3日実施　日本医科大(医学部)

$\boxed{1}$

問1　トランプのスペードとハートのカードが合わせて9枚ある。よく切って2枚を同時に取り出す。スペードの枚数をn $(0 \leqq n \leqq 9)$とするとき、以下の各問いの答えよ。

(1)　ハートのでない確率をnの式で表せ。

(2)　ハートとスペードがともに1枚ずつ出る確率をnの式で表せ。

(3)　ハートの出ない確率が0.3以上0.6未満で、ハートとスペードがともに1枚ずつでる確率が0.4未満であるとき、nの値の範囲を求めよ。

問2　四面体OABCにおいて

$$OA=OB=OC=\sqrt{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1$$

であるとき、以下の各問いに答えよ。

(1)　辺AB, BCの長さを求めよ。

(2)　内積$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$の値を求めよ。

(3)　四面体OABCの体積を求めよ。

問3　aを実数とする。xの二次方程式$(a^2+1)x^2-2(a+1)x+a=0$の2つの解が$\sin\theta, \cos\theta$(ただし、$0 \leqq \theta \leqq \pi$)であるとき、aとθの値の組(a, θ)をすべて求めよ。

(解説)

問1　(1)　$p_n=\dfrac{{}_nC_2}{{}_9C_2}=\dfrac{n(n-1)}{72}$

(2)　$q_n=\dfrac{{}_nC_1\cdot{}_{9-n}C_1}{{}_9C_2}=\dfrac{n(9-n)}{92}$

(3)　$q_0=q_9=0<0.4,\ q_1=q_8=\dfrac{2}{9}<0.4,\ q_2=q_7=\dfrac{7}{18}<0.4$は適。

$q_4=q_5>q_3=q_6=\dfrac{1}{2}>0.4$ は不適。以上より$n=0,1,2,7,8,9$

この6個に対して

$p_0=p_1=0<0.3$より不適。 $p_2=\dfrac{1}{36}<0.3$より不適。

$p_7=\dfrac{46}{72}$は$0.3 \leqq p_7<0.6$を満たす。$p_9>p_8=\dfrac{56}{72}>0.6$より不適。

以上より$n=7$に限る。

問2　(1)

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3-4+3=2$

よって、$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3-4+3=2$

よって、$\mathrm{AC}=\sqrt{2}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=1-2-2+3=0$

(3)　ACの中点をMとすると、$\mathrm{OB}=\sqrt{3}, \mathrm{OM}=\sqrt{2}, \mathrm{MB}=1$ゆえ、

$\mathrm{OM}^2+\mathrm{MB}^2=\mathrm{OB}^2$

が成り立つ。よって$\angle\mathrm{OMB}=90°$がいえる。

四面体の底面を直角三角形ABCとすると、OMが高さとなる。

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

問3　$(a^2+1)x^2-2(a+1)x+a=0$の2つの解が$\sin\theta, \cos\theta$(ただし、$0 \leqq \theta \leqq \pi$)なので解と係数の関係より、

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2(a+1)}{a^2+1}\ \cdots ①\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{a}{a^2+1}\ \cdots ②$$

が成り立つ。$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ に①②を代入すると

$$\frac{4(a+1)^2}{(a^2+1)^2}=1+\frac{2a}{a^2+1} \Leftrightarrow 4(a+1)^2=(a^2+1)^2+2a(a^2+1)$$

$$\Leftrightarrow a^4+2a^3-2a^2-6a-3=0 \Leftrightarrow (a+1)^2(a^2-3)=0$$

$$\Leftrightarrow a=-1, \pm\sqrt{3}$$

②より、$\sin 2\theta=\dfrac{2a}{a^2+1}$ …③ となるので、これを利用してθを求める。

(i)　$a=-1$の時。$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$と③より、

$\sin 2\theta=-1 \Leftrightarrow 2\theta=\dfrac{3}{2}\pi \Leftrightarrow \theta=\dfrac{3}{4}\pi$　このとき、

①の左辺$=\sin\dfrac{3}{4}\pi+\cos\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$

①の右辺$=\dfrac{2(-1+1)}{1+1}=0$ となり適。

(ii)　$a=\sqrt{3}$ の時。$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$と③より、

$\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\theta=\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2}{3}\pi \Leftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$の時

①の左辺$=\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

①の右辺$=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{3+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}$ となり適。

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$の時

①の左辺$=\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}$

①の右辺$=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{3+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}$ となり適。

(iii)　$a=-\sqrt{3}$ の時。$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$と③より、

$\sin 2\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\theta=\dfrac{4}{3}\pi, \dfrac{5}{3}\pi \Leftrightarrow \theta=\dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{5}{6}\pi$

$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$の時

①の左辺$=\sin\dfrac{2}{3}\pi+\cos\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}$

①の右辺$=\dfrac{2(-\sqrt{3}+1)}{3+1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}$ となり不適。

$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$の時

①の左辺$=\sin\dfrac{5}{6}\pi+\cos\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

①の右辺$=\dfrac{2(-\sqrt{3}+1)}{3+1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}$ となり適。

以上より、

$(a, \theta)=\left(-1, \dfrac{3}{4}\pi\right), \left(\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{6}\right), \left(\sqrt{3}, \dfrac{2}{3}\pi\right), \left(-1, \dfrac{3}{4}\pi\right)$

$\boxed{2}$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$には、≧または≦が入る。この各々の不等式について、≧または≦を決定し、その証明を与えよ。問2, 問3については等号成立条件は述べなくてもよい。

なお以下に現れる全ての文字、すなわち

$$x, k, \alpha, \beta, \gamma, a, b, c \quad \text{および} \quad s_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \ (n=1,2,3)$$

は正の実数をとるものとする。また対数の底はeとする。

問1　kを定数とするとき、全てのxについて

$$\log x-\log k \ \boxed{1}\ \frac{1}{k}(x-k)$$

が成り立つ。

問2　kを$\alpha a+\beta b+\gamma c$ とおき、問1の不等式を利用することにより、次を得る。

ただし、$\alpha+\beta+\gamma=1$とする。

$$\alpha\log a+\beta\log b+\gamma\log c\ \boxed{2}\ \log(\alpha a+\beta b+\gamma c)$$

問3　s_1, s_2, s_3 を次で定める。

$$\begin{cases} s_1=\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c \\ s_2=\alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c \\ s_3=\alpha_3 a+\beta_3 b+\gamma_3 c \end{cases}$$

ただし、

$$\sum_{n=1}^{3}\alpha_n=\sum_{n=1}^{3}\beta_n=\sum_{n=1}^{3}\gamma_n=1, \qquad \alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1 \quad (n=1,2,3)$$

とする。このとき、

$$s_1s_2s_3\ \boxed{3}\ abc$$

が成り立つ。

(解説)

問1　$\log x-\log k \leqq \frac{1}{k}(x-k) \cdots ①$　　より$\boxed{1}$は≦が入る

$g(t)=t-1-\log t \ (t>0)$とおく。

$g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$ より $g(t)$は$t=1$で極小となる。

極小値$=g(1)=1-1-\log 1=0$より、$g(t)\geqq 0$

$t=\frac{x}{k}$とおくと、$\frac{x}{k}-1-\log\frac{x}{k}\geqq 0 \Leftrightarrow \log\frac{x}{k}\leqq\frac{x}{k}-1 \Leftrightarrow \log x-\log k\leqq\frac{1}{k}(x-k)$

等号成立条件は$\frac{x}{k}=1$ 即ち、$x=k$の時に限る。

【別解】平均値の定理を用いても良い。

(i)　$x=k$の時。

①の左辺$=0$ と ①の右辺$=0$ より等号で①が成立。

(ii)　$x>k$の時。$f(x)=\log x$として平均値の定理より、

$$\frac{\log x-\log k}{x-k}=\frac{1}{c} \quad k<c<x$$

を満たすcが存在する。$0<k<c$より、$\frac{1}{c}<\frac{1}{k}$ となるので、

$$\frac{\log x-\log k}{x-k}<\frac{1}{k} \Leftrightarrow \log x-\log k<\frac{1}{k}(x-k)$$

(iii)　$x<k$の時。$f(x)=\log x$として平均値の定理より、

$$\frac{\log x-\log k}{x-k}=\frac{1}{c} \quad x<c<k$$

を満たすcが存在する。$0<c<k$より、$\frac{1}{c}>\frac{1}{k}$ となるので、$x-k<0$に注意すると

$$\frac{\log x-\log k}{x-k}>\frac{1}{k} \Leftrightarrow \log x-\log k<\frac{1}{k}(x-k)$$

以上より不等式①が成り立つ。等号成立は$x=k$の時に限る。

問2　　$\alpha\log a+\beta\log b+\gamma\log c\leqq\log(\alpha a+\beta b+\gamma c)\cdots ②$　より$\boxed{2}$は≦が入る

不等式①に$x=a, b, c$を代入すると

$$\log a-\log k \leqq \frac{a}{k}-1 \cdots ③$$

$$\log b-\log k \leqq \frac{b}{k}-1 \cdots ④$$

$$\log c-\log k \leqq \frac{c}{k}-1 \cdots ⑤$$

$\alpha\times③+\beta\times④+\gamma\times⑤$ より、

$$\alpha\log a+\beta\log b+\gamma\log c-(\alpha+\beta+\gamma)\log k\leqq\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{k}-(\alpha+\beta+\gamma)$$

$\alpha+\beta+\gamma=1$を用いると

$$\alpha\log a+\beta\log b+\gamma\log c-\log k\leqq\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{k}-1=\frac{k}{k}-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha\log a+\beta\log b+\gamma\log c\leqq\log k$$

$$\Leftrightarrow \alpha\log a+\beta\log b+\gamma\log c\leqq\log(\alpha a+\beta b+\gamma c)$$

問3　$s_1s_2s_3\geqq abc\cdots ⑥$　より$\boxed{3}$は≧が入る

②より、

$$\log s_1=\log(\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c)\geqq\alpha_1\log a+\beta_1\log b+\gamma_1\log c \cdots ⑥$$

$$\log s_2=\log(\alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c)\geqq\alpha_2\log a+\beta_2\log b+\gamma_2\log c \cdots ⑦$$

$$\log s_3=\log(\alpha_3 a+\beta_3 b+\gamma_3 c)\geqq\alpha_3\log a+\beta_3\log b+\gamma_3\log c \cdots ⑧$$

⑥+⑦+⑧より、

$$\log s_1+\log s_2+\log s_3\geqq(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\log a+(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\log b+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\log c$$

$\sum_{n=1}^{3}\alpha_n=\sum_{n=1}^{3}\beta_n=\sum_{n=1}^{3}\gamma_n=1$より、

$$\log s_1+\log s_2+\log s_3\geqq\log a+\log b+\log c$$

$$\Leftrightarrow \log s_1s_2s_3\geqq\log abc$$

底$=e>1$ より、$s_1s_2s_3\geqq abc$

$\boxed{3}$

eを自然対数の底とするとき、定積分$I=\int_0^2 e^{-x^2}dx$の値に関する以下の各問いに答えよ。

問1　次の2つの定積分の値を、Iを用いて表し、計算課程を記せ。

$$(1)\ \int_0^2 x^2e^{-x^2}dx \qquad (2)\ \int_0^2 x^4e^{-x^2}dx$$

問2　閉区間 $a\leqq x\leqq b$ において関数$f(x)$とその導関数$f'(x)$は微分可能、第2次導関数$f''(x)$は連続であるとする。このとき不等式

$$\int_a^b(\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2+\{f''(x)\}^2)dx+\Big[\{f(x)+f'(x)\}^2\Big]_a^b\geqq 0$$

が成り立つことを示せ(等号成立条件は述べなくてよい)。ただし、関数$g(x)$に体して$\Big[g(x)\Big]_a^b$は$g(b)-g(a)$を表す。

問3　不等式

$$I\geqq\frac{4}{5}+\frac{6}{5e^4}$$

が成り立つことを示せ。

(解説)

問1　$S=\int_0^2 x^2e^{x^2}dx$とおく。

$$S=\int_0^2(-2x)e^{-x^2}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)dx=-\left[e^{-x^2}\cdot\frac{x}{2}\right]_0^2+\int_0^2 e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2}dx=-\frac{1}{e^4}+\frac{1}{2}I$$

$T=\int_0^2 x^4e^{x^2}dx$とおく。

$$T=\int_0^2(-2x)e^{-x^2}\cdot\left(-\frac{x^3}{2}\right)dx=-\left[e^{-x^2}\cdot\frac{x^3}{2}\right]_0^2+\int_0^2 e^{-x^2}\cdot\frac{3}{2}x^2dx=-\frac{4}{e^4}+\frac{3}{2}S$$

$$=-\frac{4}{e^2}+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{e^4}+\frac{1}{2}I\right)=-\frac{11}{2e^4}+\frac{3}{4}I$$

問2　$G(x)=\{f(x)+f'(x)\}^2$とおく。

$$G'(x)=2\{f(x)+f'(x)\}\{f'(x)+f''(x)\}$$

$$=2f(x)f'(x)+2\{f'(x)\}^2+2f(x)f''(x)+2f'(x)f''(x)$$

よって、

$$\int_a^b(\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2+\{f''(x)\}^2)dx+\Big[\{f(x)+f'(x)\}^2\Big]_a^b$$

$$=\int_a^b(\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2+\{f''(x)\}^2)dx+\Big[G(x)\Big]_a^b$$

$$=\int_a^b(\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2+\{f''(x)\}^2)dx+\int_a^b G'(x)dx$$

$$=\int_a^b(\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2+\{f''(x)\}^2+2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)+2f''(x)f(x))dx$$

$$=\int_a^b\{f(x)+f'(x)+f''(x)\}^2dx\geqq 0$$

問3　$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ とおく。この時、$\{f(x)\}^2=e^{-x^2}$となる。

$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}},\ f''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}-x\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$ なので、

$$\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2+\{f''(x)\}^2=e^{-x^2}-x^2e^{-x^2}+(x^2-1)^2e^{-x^2}$$

$$=2e^{-x^2}-3x^2e^{-x^2}+x^4e^{-x^2}\cdots ①$$

$f(x)+f'(x)=(1-x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ より、

$$\{f(x)+f'(x)\}^2=(x-1)^2e^{-x^2}\cdots ②$$

$a=0, b=2$として①と②を問2の結果に代入すると

$$\int_0^2(2e^{-x^2}-3x^2e^{-x^2}+x^4e^{-x^2})dx+\Big[(x-1)^2e^{-x^2}\Big]_0^2\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow 2I-3S+T+\frac{1}{e^4}-1\geqq 0 \quad (\text{問1の結果を用いると})$$

$$\Leftrightarrow 2I-\frac{3}{e^4}-\frac{3}{2}I-\frac{11}{2e}+\frac{3}{4}I+\frac{1}{e^4}-1\geqq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}I\geqq\frac{3}{2e^4}+1 \Leftrightarrow I\geqq\frac{6}{5e^4}+\frac{4}{5}$$