

- 1
- 次の各問いに対し、結果のみを解答欄に記せ。
- 問1 xy 平面上の放物線 $C: y = x^2 - x - 2$ の上に2点 P, Q をとる。
ただし、 P の x 座標は Q の x 座標より小さいとする。
- (a) 原点 O が線分 PQ の中点となるとき、直線 PQ の方程式を求めよ。
(b) 原点 O が線分 PQ を $2:1$ に内分するとき、直線 PQ の方程式を求めよ。
(c) 原点 O が線分 PQ を $2:1$ に内分するとき、放物線 C と直線 PQ によって囲まれる図形の面積を求めよ。
- 問2 n を3以上の整数として、 $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n$ を満たす整数 j, k の組 (j, k) の全体(n^2 組ある)の集合を I とする。結果はできる限り因数分解した形で記せ。
- (a) 組 (j, k) が I 全体を動くとき、積 jk の総和を求めよ。
(b) 組 (j, k) が $j < k$ を満たして I の中を動くとき、積 jk の総和を求めよ。
(c) 組 (j, k) が $j < k - 1$ を満たして I の中を動くとき、積 jk の総和を求めよ。
- 問3 実数全体で定義された関数 $f(x) = x^3 - 6x$ を考える。
- (a) $f(x)$ を極小にする x の値を求めよ。
(b) 方程式 $f(x) = a$ を満たす実数 x が2つ以上存在するような定数 a の条件を求めよ。
(c) 方程式 $f(x) = a$ および不等式 $1 \leq x \leq 5$ を満たす実数 x が2つ以上存在するような定数 a の条件を求めよ。
- (答)
- 問1 (a) $y = -x$ (b) $y = -2x$ (c) $\frac{9}{2}$
- 問2 (a) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ (b) $\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$
(c) $\frac{1}{8}n(n+1)(n-1)(n-2)$
- 問3 (a) $\sqrt{2}$ (b) $-4\sqrt{2} \leq a \leq 4\sqrt{2}$ (c) $-4\sqrt{2} < a \leq -5$

- 2
- $0 < \alpha < \pi$ なる α を固定する。
- O を原点とする xy 平面上において点列 $A_0, A_1, A_2, \dots$ を、 A_k の座標が $\left(\cos\left(-\frac{\alpha}{2} + k\alpha\right), \sin\left(-\frac{\alpha}{2} + k\alpha\right)\right) (k=0, 1, 2, \dots)$ となるようにとる。
- ベクトル $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$ の成分を $(r \cos \theta_k, r \sin \theta_k) (k=0, 1, 2, \dots)$ とおく。
ただし、 $r > 0$ とする。
- 問1 $r, \theta_0, \theta_1, \theta_2$ を α を用いて表せ。結果のみを記せ
- 問2 n を正の整数とするととき、等式
$$\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0 A_1} + \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + \overrightarrow{A_n A_{n+1}} = \overrightarrow{OA_{n+1}}$$
 を利用して、和 $\sum_{k=0}^n \cos k\alpha$ および和 $\sum_{k=0}^n \sin k\alpha$ を求め、 n, α を用いて表せ。
- 問3 n を正の整数とするととき、和 $\sum_{k=0}^n \cos k\alpha \sin k\alpha$ を求め、 n, α を用いて表せ。
- 問4 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (\alpha \cos k\alpha + \sin k\alpha)$
- (答) 問1 $r = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2\alpha$
- 問2
$$\sum_{k=0}^n \cos k\alpha = \frac{\sin \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} + \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$
$$\sum_{k=0}^n \sin k\alpha = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$
- 問3
$$\sum_{k=0}^n \cos k\alpha \sin k\alpha = \frac{\cos \alpha - \cos \{(2n+1)\alpha\}}{4 \sin \alpha}$$
- 問4
$$\frac{\alpha^2 + 1}{2}$$

- 3
- O を原点とする。 xyz 空間において、点 $(1, 0, 0)$ を中心とする半径2の球の表面および内部を K_1 、点 $(-1, 0, 0)$ を中心とする半径2の球の表面および内部を K_2 とし、空間内の3点 P, Q, R に対し、
$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$
$$\overrightarrow{OY} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$$
 で定まる点 X, Y を考える。
- 問1 P が K_1 を、 Q が K_2 をくまなく動くとき、点 X の全体が作る立体の体積を求めよ。
- 問2 次の条件を満たす点 R の全体が作る立体の体積を求めよ。
「 K_1 に属する任意の P と、 K_2 に属する任意の Q に対して、 Y は K_1 に属する。」
- 問3 次の条件を満たす点 R の全体が作る立体の体積を求めよ。
「 K_1 に属する任意の P と、 K_2 に属する任意の Q に対して、 Y は $K_1 \cup K_2$ に属する。」
- (答) 問1 $\frac{256}{3}\pi$ 問2 $\frac{32}{3}\pi$ 問3 $\frac{338}{3}\pi - 16\sqrt{3}\pi^2$