2016 年度　久留米大学(医)入試　数学　解答速報

1.

(i) $mx-y+1=0$ ……①

$x+my-m-2=0$ …②

①より $mx=y-1$ ……①′

ア) $x\neq 0$ のとき

①′より $m=\frac{y-1}{x}$ …③

③を②へ代入

$x+\frac{y-1}{x}\cdot y-\frac{y-1}{x}-2=0$

$x^2+(y-1)y-(y-1)-2x=0$

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

イ) $x=0$ のとき

①′より $y=1$

②へ $x=0,\ y=1$ を代入すると

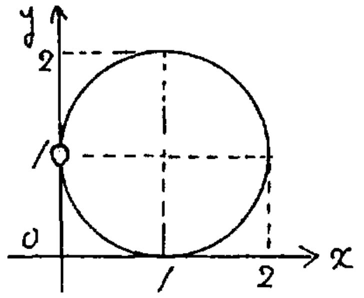
$0+m-m-2=0$

$0=-2$ となり不合理だから不適

以上から軌跡は

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

ただし，$(0,1)$を除く

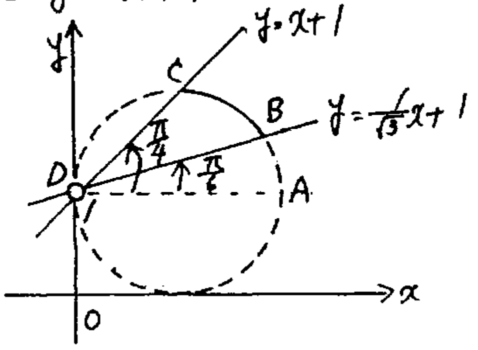


(ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq m\leqq 1$ のとき　③より

$\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq\frac{y-1}{x}\leqq 1$

$x>0$ だから

$\frac{1}{\sqrt{3}}x+1\leqq y\leqq x+1$



$y=x+1$ と $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+1$ と x軸の正方向となす

角は $\frac{\pi}{4}$ と $\frac{\pi}{6}$ だから

$\overset{\frown}{CD}=\frac{1}{4}\times 2\pi=\frac{\pi}{2}$，$\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{6}\times 2\pi=\frac{\pi}{3}$

$\overset{\frown}{AD}=\pi$ だから　$\overset{\frown}{BC}=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

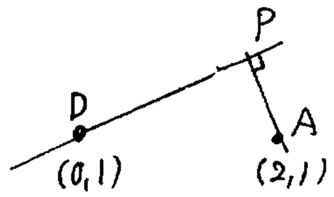
[(i)の別解]

① $\Longrightarrow$ $y=mx+1$ ……①′

② $\longrightarrow$ $(x-2)+m(y-1)=0$ …②′

①′⊥②′で　①′は定点$(0,1)$を通る直線

②′は定点$(2,1)$を通る直線



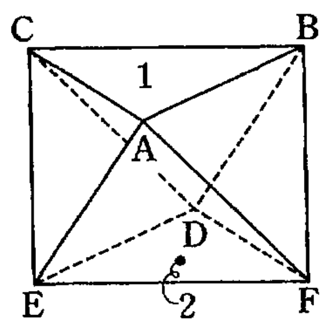
常に∠APD＝90°だから，PはADを直径の両端とする円

従って中心$(1,1)$半径1となるので

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

ただし，①′は$x=0$，②′は$y=1$を通れないので　$(0,1)$を除く

2.



(i)　頂点の数は　6個ある

(ii)　Aに1を付ける。D点の付け方は5通り。C，E，F，Bの付け方は残り4つの数の円順列となるので，$5\times(4-1)!=5\times 6=30$

(iii)　1の面に平行な面(対面)を2の面とする。このとき，3の面は△ABFか△AEFの2通りとなる。

まず，赤を1の面に塗る。もう1つは2の面，△ABF，△AEFの3通りあり，残った面に白を塗るので，3通りある。

(iv) 3つの面に赤を塗るので，その塗り方は

ア) 1の面と2の面と△ABF

イ) 1の面と2の面と△AEF

ウ) 1の面と△ABFと△AEF

の3通りある。

3.

$$I_1 = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

$\sqrt{1+x}=t$ とおくと $x=t^2-1$

$\frac{dx}{dt}=2t \longrightarrow dx=2t\,dt$

x	$0 \cdots 3$
t	$1 \cdots 2$

$$I_1 = \int_1^2 \frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2t\,dt$$

$$= 2\int_1^2 (t^4-2t^2+1)\,dt$$

$$= 2\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right]_1^2$$

$$= 2\left\{\frac{1}{5}(32-1)-\frac{2}{3}(8-1)+(2-1)\right\}$$

$$= 2\left(\frac{31}{5}-\frac{14}{3}+1\right)$$

$$= \frac{76}{15}$$

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} 2x\log(1+x^2)\,dx$$

$1+x^2=u$ とおくと $\frac{du}{dx}=2x \longrightarrow 2x\,dx=du$

x	$1 \cdots \sqrt{3}$
u	$2 \cdots 4$

$$I_2 = \int_2^4 \log u\,du$$

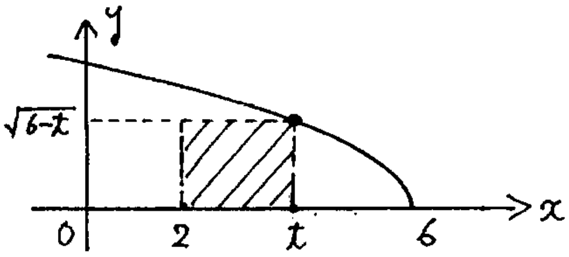
$$= \left[u\log u - u\right]_2^4$$

$$= (4\log 4-4)-(2\log 2-2)$$

$$= 8\log 2-4-2\log 2+2$$

$$= 6\log 2-2$$

4



(i) $S(t)=(t-2)\sqrt{6-t}\quad(4\leqq t\leqq 5)$

(ii) $S'(t)=\sqrt{6-t}+(t-2)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{6-t}}$

$$=\frac{14-3t}{2\sqrt{6-t}}$$

t	4		$\frac{14}{3}$		5
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	極大	↘	

$t=\frac{14}{3}$ で極大かつ最大

最大値 $S\left(\frac{14}{3}\right)=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{16\sqrt{3}}{9}$

$S(4)=2\sqrt{2}$，$S(5)=3$ だから

最小値 $S(4)=2\sqrt{2}$

(iii) 区分求積法より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)$$

$$=\int_4^5 S(x)\,dx$$

$$=\int_4^5 (x-2)\sqrt{6-x}\,dx \cdots\cdots(※)$$

$6-x=u$ とおくと $dx=-du$

x	$4 \cdots 5$
u	$2 \cdots 1$

$$(※)=\int_2^1 (4-u)\sqrt{u}\,(-du)$$

$$=\int_1^2 (4\sqrt{u}-u\sqrt{u})\,du$$

$$=\left[\frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}\cdot 2\sqrt{2}-\frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2}\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{2}{5}\right)$$

$$=\frac{56}{15}\sqrt{2}-\frac{34}{15}$$

5.

(i) $3(a_{n+1})^2=(a_n)^3 \quad (a_n>0)$

両辺の対数を取ると

$\log 3+2\log a_{n+1}=3\log a_n$

$\log a_{n+1}=\frac{3}{2}\log a_n-\frac{1}{2}\log 3$

$\left(\begin{array}{l}\alpha=\frac{3}{2}\alpha-\frac{1}{2}\log 3\\ \alpha=\log 3\end{array}\right)$

$\log a_{n+1}-\log 3=\frac{3}{2}(\log a_n-\log 3)$

数列 $\{\log a_n-\log 3\}$ は

公比 $\frac{3}{2}$, 初項 $\log a_1-\log 3$

の等比数列だから

$\log a_n-\log 3=(\log a_1-\log 3)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\log a_n=\log 3+(\log a_1-\log 3)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

(ii) $n\longrightarrow\infty$ のとき, $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\longrightarrow\infty$

となるので, 数列 $\{a_n\}$ つまり

$\{\log a_n\}$ が収束する条件は

$\log a_1-\log 3=0$

$a_1=3$

6.

$9\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

始点をAにすると

$-9\overrightarrow{AP}+4(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

$15\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

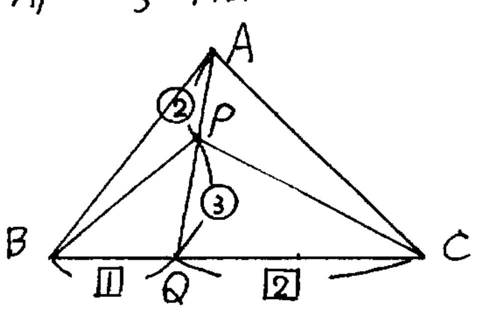
$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{15}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\frac{2}{5}\,\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$

BCを1:2に内分する点をQとすると

$\overrightarrow{AQ}=\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$ だから

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AQ}$



BQ:QC=1:2, AP:PQ=2:3

△PBQ=1, △P Q=2とすると

△PCA$=\frac{2}{3}$△PCQ$=\frac{4}{3}$

△PAB$=\frac{2}{3}$△PBQ$=\frac{2}{3}$

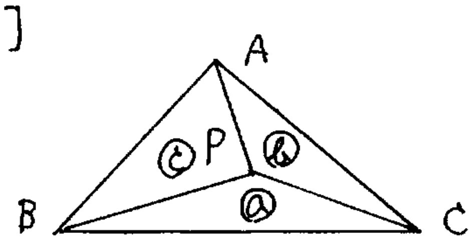
従って, △PAB:△PBC:△PCA

$=S_1:S_2:S_3$

$=\frac{2}{3}:(1+2):\frac{4}{3}$

$=2:9:4$

[参考]



$a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ の時

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$

△PBC:△PCA:△PAB

$=a:b:c$

[講評]

昨年から, 1題減って, 6題となった。

1. 2直線の交点の軌跡と弧の長さ
2. 正八面体の番号の付け方, 色の塗り方
3. 定積分計算
4. 関数の最大, 最小と区分求積法
5. 対数を取る隣接2項間漸化式
6. 平面ベクトルの三角形の面積比

2の(iii)(iv)は考えずらいが, 他の5題は基本から標準的な問題が並んでいる。従って, 合格ラインは上がって, 75%程度と思われる。