

平成 31 年度入学試験問題

数 学

I 注 意 事 項

1. 指示があるまでこの冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は全部で、5 ページです。設問は I から IV まであります。
3. 解答用紙のマーク数字は、次の「良い例」のように、濃く正しく塗りつぶしなさい。正しく塗りつぶされていない場合、採点できないことがあります。

良い例……………●

悪い例……………

4. 解答用紙には解答欄の他に次の記入欄があるので、正確に記入しなさい。
 - ① 氏名欄……………氏名を漢字とフリガナで記入しなさい。
 - ② 受験番号欄……………6桁の受験番号を算用数字で記入し、マーク欄の数字を正しく塗りつぶしなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気がついた場合は、手を上げて申し出なさい。
6. 試験中に質問がある場合は、手を上げて申し出なさい。
7. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。
8. 途中退場は認めません。

II 解答上の注意

解答上の注意が裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、冊子を開いてはいけません。

II 解答上の注意

- 1 問題の文中の ア , イウ などには、特に指示がないかぎり、数字(0~9)、または負の符号(-)が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイ に-8と答えたいとき

ア	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	<input type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	<input checked="" type="radio"/>	9

- 2 分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。負の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として

ウ	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
エ	<input type="radio"/>	0	1	2	3	<input checked="" type="radio"/>	5	6	7	8	9
オ	<input type="radio"/>	0	1	2	3	4	<input checked="" type="radio"/>	6	7	8	9

- 3 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、 $\sqrt{\text{カキ}}$, $\frac{\sqrt{\text{クケ}}}{\text{コ}}$, $\sqrt{\text{サシ}}$ に $2\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $6\sqrt{2}$ と

答えるところを、 $1\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$, $3\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

問題は次のページから始まります。

Windom

I , , , , の解答は該当する解答群から最も適当なものを選ぶ。

(1) 下記 9 個のデータ

2, 4, 1, 4, 2, 5, 2, 5, 2

の中央値は , 平均値は , 最頻値は , 分散は である。

(2) 下記 2 つの条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{2^{(1-n)}}{7} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$a_3 = \frac{\text{オカ}}{\text{キク}}$ である。 $n > 3$ を満たす n に対して上記条件を繰り返し適用すると

$$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{2^{\text{ク}}}{7} = \frac{1}{\text{コ}} a_{n-2} + \frac{\text{サ}}{7} 2^{\text{ケ}}$$

のように、 a_n をより n の小さい項で表すことができる。 よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\text{シ}}{\text{ス}} 2^{\text{セ}} + \frac{n}{\text{ソ}} 2^{\text{タ}}$$

と求められる。 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$$S_n = \frac{1}{\text{チ}} \left(\text{ツテ} - \text{ト} 2^{\text{テ}} - n \times 2^{\text{ト}} \right)$$

であり、次式が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\text{ヌネ}}{\text{ノ}}$$

, , , , の解答群

- ① $-n-2$ ② $-n-1$ ③ $-n$ ④ $-n+1$ ⑤ $-n+2$

Windom

II 原点を極, x 軸の正の部分の始線とする極座標に対し, 極方程式 $r = \frac{5}{3 - 2 \cos \theta}$ で表される楕円を C とする.

(a) 楕円 C 上の点 (x, y) は, 下記の方程式を満たす.

$$\frac{(x - \boxed{\text{ア}})^2}{\boxed{\text{イ}}} + \frac{y^2}{\boxed{\text{ウ}}} = 1$$

楕円 C の 2 つの焦点のうち, x 座標の値が大きいものは $(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}})$ であり, 楕円

C の離心率は $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である. 点 $P(x, y)$ が楕円 C 上を動くとき, $2x + y$ の最大値は

$$\boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である.

(b) 2 つの焦点の midpoint が原点と一致するように, C を x 軸の負の方向に $\boxed{\text{サ}}$ だけ平行移動して得られる楕円を D とする. 楕円 D の接線と x 軸, および y 軸で囲まれる三角形の面積の最小値は $\boxed{\text{シ}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ であり, 最小値を実現する楕円 D の接線は $\boxed{\text{セ}}$ 本存在す

る. このうち, 第 1 象限にある接点の座標は $(\frac{\boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}, \frac{\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}})$ である.

(c) 複素数平面において, 点 z が原点を中心とする半径 r の円周上を動くとき,

$$x + iy = z + \frac{k}{z} \quad (\text{ただし, } i \text{ は虚数単位, } k \text{ は実数定数})$$

を満たす実数の組 (x, y) の描く図形が楕円 D であったとすると,

$$r = \frac{\boxed{\text{ナ}} + \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}, \quad k = \boxed{\text{ネ}}$$

が成り立つ.

Windom

Ⅲ 座標空間において、点 $A(0, 0, 6\sqrt{2})$, $B(0, -3, 0)$ を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点を P とし、線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を C とする。

(a) $AB = \boxed{\text{ア}}$ であり、曲面 C を線分 AB によって切り開いて得られる展開図は、中心角 $\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ の扇形である。

(b) 曲面 C と xy 平面との共有点のうち、点 P からの距離が最大となる点 Q の座標は $(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}, 0)$ であり、 $PQ = \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ が成り立つ。

(c) 2点 P, Q を最短で結ぶ曲面 C 上の曲線を L とする。 L の長さは $\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。曲線 L と xz 平面との交点を R とすると、 $AR = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ が成り立つ。

(d) 曲線 L 上の動点を S とする。点 S が点 P から出発して点 Q に至る間に、線分 AS が通過する領域の面積は $\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。

Windom

Windom

IV 座標平面において、 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフを放物線 C 、原点で C に接する半径 R の下に凸の半円を S とする。放物線 C 上を運動する点 P の x 座標が、時刻 t において $x = 2t - 4$ と表されるものとする。

(a) 時刻が $t = 0$ から 3 まで経過したとすると、この間の点 P の y 座標は、 $t = \boxed{\text{ア}}$ において最大値 $\boxed{\text{イウ}}$ をとり、 $t = \boxed{\text{エ}}$ において最小値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる。以下、この最小値を実現する時刻を t_m とする。

(b) 時刻が $t \neq t_m$ のとき、点 P における放物線 C の法線の方程式は

$$y = \frac{1}{\boxed{\text{カ}}(t_m - t)}x + \boxed{\text{キ}}t^2 - \boxed{\text{クケ}}t + \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。この法線の y 切片を $r(t)$ とすると

$$\lim_{t \rightarrow t_m} r(t) = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

が成り立つ。この極限値を ρ とする。

(c) 時刻 t における点 P の速さ v と加速度 \vec{a} は

$$v = \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タチ}}(t - t_m)^2 + \boxed{\text{ツ}}},$$

$$\vec{a} = (\boxed{\text{テ}}, \boxed{\text{トナ}})$$

と表される。したがって、時刻 $t = t_m$ において $\rho \times |\vec{a}| = v \boxed{\text{ニ}}$ が成り立つ。

(d) $t_m - \frac{1}{8} \leq t \leq t_m + \frac{1}{8}$ を満たす時刻 t において、半円 S 上にある点 Q は、その x 座標が点 P の x 座標と一致するように運動した。2 点 P, Q の y 座標をそれぞれ y, Y とすると、

$$Y = R - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}x \boxed{\text{ネ}} + R^2}$$

と書けるので、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Y - y}{y} = 0$ となるように S の半径 R を決めると $\frac{R}{\rho} = \boxed{\text{ノ}}$ が成り立つ。

Windom