第１問　各面が白色の無地で、記号「○」を書いたり消したりできる、立方体のサイコロがある。ただし、このサイコロを振ったとき、どの面も等しい確率で「出る（上の面になる）」ものとする。

このサイコロを用いて次の操作を繰り返す。

操作：サイコロを３回振り、○が k 回出たら、$2k$ 個の面には○が書かれ、残りの面には何も書かれていない状態になるように、○を書き足したり、消したりする。

最初、２つの面に○が書かれており、残りの面には何も書かれていない。

n 回の操作の後、○が書かれた面の数が２、４、６である確率をそれぞれ p_n、q_n、r_n とする。

このとき、次の問い（**問１～４**）に答えよ。

問１　２回目の操作の後、○が書かれた面が１つもない確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオカ}}}$ である。また、２回目の操作の後、すべての面に○が書かれている確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコサ}}}$ である。

問２　$p_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}p_n + \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}q_n$、$q_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}p_n + \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}q_n$ が成り立つ。

問３　$p_n = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\left\{\left(\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right)^n + \left(\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\right)^n\right\}$

（ただし、$\boxed{\text{ヌ}} < \boxed{\text{ノ}}$）、

$q_n = \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}\left\{\left(\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}\right)^n - \left(\dfrac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}\right)^n\right\}$

である。

問４　$r_n = \dfrac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}} - \dfrac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}\left(\dfrac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}\right)^n + \dfrac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}\left(\dfrac{\boxed{\text{リ}}}{\boxed{\text{ル}}}\right)^n$ である。

第３問　座標平面上において、２点 $F_1(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$、$F_2(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ からの距離の差が $2\sqrt{3}$ であるような点Ｐの軌跡を C とする。また、直線 $x + y = 2\sqrt{6}$ を l とし、l と C の２つの交点のうち、x 座標の大きい方の点をＡとする。

このとき、次の問い（**問１～４**）に答えよ。

問１　C の方程式は

$$x^2 - \boxed{\text{ア}}\,xy + y^2 = \boxed{\text{イウ}}$$

である。

問２　点Ａの座標は

$$A\left(\frac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\right)$$

である。また、点Ａを、原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点の座標は

$$\left(\sqrt{\boxed{\text{ケ}}},\ \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\right)$$

である。

問３　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1-x^2)^2}\,dx$ の値は

$$\sqrt{\boxed{\text{シ}}} + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\log\left(\boxed{\text{ソ}} + \sqrt{\boxed{\text{タ}}}\right)$$

である。

問４　曲線 C と直線 l によって囲まれる部分の面積は

$$\boxed{\text{チ}} - \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\log\left(\boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}}\right)$$

である。

第２問　空間の異なる４点Ｏ、Ａ、Ｂ、Ｃについて、この４点は同一平面上になく、$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{AB} = 1$、$\mathrm{BC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ が成り立っている。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ として、次の問い（**問１～４**）に答えよ。

問１　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$、三角形OABの面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

問２　Ｂから直線OCに垂線BKを下ろす。直線BK上の点Ｐについて、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ が成り立つ。

問３　$\vec{c}\cdot\vec{a}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{キ}} - \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}} < \vec{c}\cdot\vec{a} < \frac{\boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

問４　四面体OABCの体積は $\vec{c}\cdot\vec{a} = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のとき、最大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ をとる。