

第1問 点Oを中心とする半径 r の球面上の5点A、B、C、D、Eを頂点とする四角すいがある。四角すいABCDEの底面BCDEは一辺の長さが1の正方形で、 $AB = AE = \sqrt{3}$ 、 $AC = AD = 2$ である。このとき、次の問い(問1~4)に答えよ。

問1 $r = \frac{\sqrt{\text{アイウ}}}{\text{エオ}}$ である。

問2 $\cos \angle CAD = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$ 、三角形ACDの面積は $\frac{\sqrt{\text{クケ}}}{\text{コ}}$ 、四面体

OACDの体積は $\frac{\sqrt{\text{サシ}}}{\text{スセソ}}$ である。

問3 四角すいABCDEの体積は $\frac{\sqrt{\text{タチ}}}{\text{ツ}}$ 、 $\angle ACD$ の二等分線と辺ADの

交点をFとすると、 $CF = \frac{\sqrt{\text{テト}}}{\text{ナ}}$ 、三角すいABCFの体積は $\frac{\sqrt{\text{ニヌ}}}{\text{ネノ}}$

である。

問4 辺AC上に点Pを、辺AD上に点Qをとり、線分の長さの和
 $BP + PQ + QE$ を l とする。 l が最小になるとき、

$l = \frac{\text{ハ}}{\text{ヘ}} \sqrt{\frac{\text{ヒ}}{\text{ヘ}}} + \frac{\text{フ}}{\text{ヘ}}$ である。

第2問 1、3、5、7、11、13、15、17、31、…のように、数字1、3、5、7のみを用いてできる自然数を小さい順に並べた数列を $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)とする。このとき、次の問い(問1~4)に答えよ。

問1 $a_{30} = \text{アイウ}$ であり、 $a_n = 77$ となるのは $n = \text{エオ}$ のときである。

問2 $a_n = 7531$ となるのは、 $n = \text{カキク}$ のときである。

問3 $\{a_n\}$ のうち、 $10 < a_n < 100$ をみたす項の総和は ケコサ である。

問4 $a_n < 1000$ をみたす最大の n の値を m とおくと、 $m = \text{シス}$ である。
 $a_n < 1000$ を満たす a_n のうち、100の位が1であるもの、3であるもの、5であるもの、7であるものともに セソ 個あるので、 $\sum_{k=1}^m a_k$ の値を素因数分解して表すと、 $2^{\text{ニ}} \times \text{チ} \times \text{ツテト}$ となる。



第3問 xy 平面における曲線 $C: y^2 = x^2(2 - |x|)$ について、次の問い(問1~4)に答えよ。

問1 曲線Cについて、グラフは $\text{アイ} \leq x \leq \text{ウ}$ の範囲で存在し、 y 座

標の最大値は $\frac{\text{エ}}{\text{カ}} \sqrt{\frac{\text{オ}}{\text{カ}}}$ である。

問2 曲線C上の点(1, 1)における接線と法線の方程式はそれぞれ

接線: $y = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}x + \frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$

法線: $y = \text{サシ}x + \text{ス}$

である。

問3 第1象限において曲線Cと x 軸で囲まれる図形(境界を含む)をDとする。

Dを x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積は $\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}\pi$ である。

問4 曲線Cの囲む図形の総面積は $\frac{\text{タチ}}{\text{テト}} \sqrt{\frac{\text{ツ}}{\text{テト}}}$ である。