数　　学

第１問

原点を中心とした半径 1 の円に内接する正三角形 T_1 がある．T_1 の頂点の 1 つが A $(0,1)$ であり，T_1 の残りの頂点のうち，x 座標が負の値である方を B とする．また，T_1 を原点に関して対称移動したものを T_2 とする．

(i) 直線 AB の方程式は，$\boxed{\quad(1)\quad}$ である．

(ii) 直線 AB と T_2 の辺との交点のうち，x 座標の値が大きい方の座標は $(x,y) =$ $\boxed{\quad(2)\quad}$ である．

(iii) T_1 と T_2 が重なる部分の面積は $\boxed{\quad(3)\quad}$ である．

第２問

曲線 $y = x^3 - 2x \cdots$ ① と直線 $y = x + k \cdots$ ② がある．

(i) k の範囲が $\boxed{\quad(4)\quad}$ のとき，曲線 ① と 直線 ② は異なる 3 点を共有する．

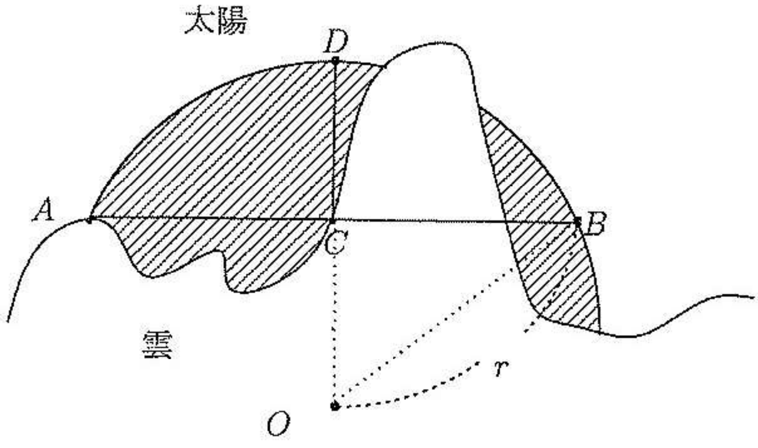
(ii) $k > 0$ とする．曲線 ① と直線 ② が異なる 2 点を共有するとき，1 つは接点で，もう 1 つの共有点の x 座標は $\boxed{\quad(5)\quad}$ である．

第3問

n を 3 以上の整数とする. $(x-1)^2P(x)+ax+b=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ が成り立っているとする. ただし $P(x)$ は x の整式とし, a,b は定数であるとする. この等式の左辺を微分すると $\boxed{\quad(6)\quad}$ である. このとき $(a,b)=\boxed{\quad(7)\quad}$ である.

第4問

下図のように太陽が雲間から見えた. 観察された太陽を半径 r の円と仮定し, 図のように見えた太陽の円周上の 2 点を A , B とし, 線分 AB の中点を C , 円周上に一点 D を線分 CD と AB が互いに直交するようにとる. $\mathrm{AB}=a$, $\mathrm{CD}=c$ とおくとき, r と a,c の関係を式で表わすと $\boxed{\quad(8)\quad}$ となる. このとき r の最小値を c を用いて表わすと, $\boxed{\quad(9)\quad}$ である. また $c<r$ の場合, 観察された太陽の中心を O とする. この円を OD を通る直径を軸に回転させてできる球において AB を通り OD に垂直な平面で 2 つの図形に分けたとき, 点 D を含む部分の体積を a,c を用いて表わすと $\boxed{\quad(10)\quad}$ である.



第５問

$n=1,2,3,\cdots$ に対して, 関数 $F_n(x)$ を

$$F_1(x)=\frac{1}{1+x} \quad , \qquad F_{n+1}(x)=\frac{1}{1+F_n(x)}$$

で定義する.

(i) $F_3(x)$ を求めると, $\boxed{\quad (11) \quad}$ である.

次に $n=1,2,3,\cdots$ に対して, 数列 $\{p_n\}$ を

$$p_1=1, \quad p_2=1, \quad p_{n+2}=p_{n+1}+p_n$$

で定義する.

(ii) $F_n(x)=\dfrac{a_n+b_nx}{c_n+d_nx}$ で与えられるとき, $n \geqq 2$ に対して a_n, b_n, c_n, d_n を数列 $\{p_n\}$ を用いて表すと $(a_n, b_n, c_n, d_n)=\boxed{\quad (12) \quad}$ である.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}$ が存在することを用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F_n(0)$ の値を求めると $\boxed{\quad (13) \quad}$ である.