

令和2年度 入学試験問題

数 学 問 題 用 紙 (後期)

| | |
|------|------|
| 試験時間 | 90分 |
| 問題用紙 | 1～8頁 |

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても、または試験を放棄する場合でも、試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り、鞆の中にしまうこと。
5. 机上には、受験票と筆記用具（鉛筆、シャープペンシル、消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓、コンパス、定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問、トイレ、体調不良等で用件のある場合は、無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は、問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は、試験の一切を無効とし、試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後、解答用紙は裏返し、問題用紙は持ち帰ること。

| | |
|------|--|
| 受験番号 | |
|------|--|

| | |
|-----|--|
| 氏 名 | |
|-----|--|

[I] O を原点とする空間内において 2 点 A, B を $OA = \sqrt{3}$, $OB = AB = \sqrt{2}$ を満たすようにとる。さらに, 点 P は以下の条件 (*) を満たしながら空間内を動くものとする。

(*) 「 $BP = \sqrt{2}$, かつ $\angle AOP = \frac{\pi}{3}$, かつ 4 点 O, A, B, P は同一平面上には存在しない。」

点 B から三角形 OAP を含む平面に垂線 BH を下ろす。 $0 < x < \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$ を満たす各 x に対して, 条件 (*) と $OP = x$ を満たす点 P が存在することは認めて良い。以下では $x = OP$, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{p} = \vec{OP}$ とおく。このとき, 以下の [ア] ~ [ヒ] に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。ただし, 有理数は既約分数で表わすこと。

問 1 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{p}$, $\vec{b} \cdot \vec{p}$ は x を用いてそれぞれ次のように表せる。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad \vec{a} \cdot \vec{p} = \sqrt{\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}} x, \quad \vec{b} \cdot \vec{p} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} x^2$$

問 2 ベクトル \vec{OH} は実数 s, t を用いて

$$\vec{OH} = s\vec{a} + t\vec{p}$$

と表せる。このとき, s, t は x を用いてそれぞれ次のように表される。

$$s = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} - \sqrt{\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}} x, \quad t = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} - \sqrt{\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}} \left(\frac{1}{x}\right)$$

問 3 $|\vec{BH}|^2$ は x を用いて次のように表せる。

$$|\vec{BH}|^2 = \frac{1}{\boxed{\text{ソ}}} \left(-x^2 + \sqrt{\boxed{\text{タ}}} x + \boxed{\text{チ}} \right)$$

問 4 点 P が条件 (*) と $\frac{1}{3} \leq \vec{b} \cdot \vec{p} \leq \frac{\sqrt{7}}{4} x$ を満たしながら動くとき, $|\vec{BH}|^2$ は $x = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$

のとき最大値 $\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとり, $x = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のとき最小値 $\frac{\boxed{\text{ネ}} + \boxed{\text{ノ}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ をとる。

(計 算 用 紙)

Windom

[II] n を 1 以上の整数とする。中が見えない n 個の袋があり、それぞれの袋の中には 1 から 5 までの整数がそれぞれ 1 つずつ書かれたカードが 5 枚入っている。これら n 個の各袋からカードを 1 枚ずつ取り出すとき、取り出された n 枚のカードに書かれている数字の和が 3 の倍数である確率を p_n とする。

問 1 p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

問 2 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ に対して、不等式

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2m} \leq |p_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{10}\right)^m$$

を満たす n の値がちょうど 20 個存在するように 1 以上の整数 m の値を定めることは可能か。可能ならばその値を求め、不可能ならばその理由を説明せよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ であるとする。

Windom

(計 算 用 紙)

Windom

[III] O を原点とする xyz 空間において、各 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) に対し 3 点 P, Q, R を次のように定める。

$$P(3^{\frac{1}{4}}(\cos \theta)^{\frac{3}{2}}, 3^{\frac{1}{4}}(\cos \theta)^{\frac{1}{2}}(\sin \theta), \theta)$$

$$Q(-(\sin \theta)^{\frac{3}{2}}, (\cos \theta)(\sin \theta)^{\frac{1}{2}}, \theta)$$

$$R(0, 0, \theta)$$

θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、線分 PQ が通過してできる曲面を K とし、 K を z 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

問 1 2 点 P, Q に対して、線分 PQ を $t:(1-t)$ (ただし、 $0 \leq t \leq 1$) に内分する点を S_t とする。 t が 0 から 1 まで動くとき、2 点 R, S_t 間の距離の最小値 l を θ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2 次の不定積分を求めよ。ただし、積分定数は省略してよい。答えのみでよい。

$$\int \frac{1}{\sin \theta} d\theta$$

問 3 V の値を求めよ。

(計算用紙)

Windom

[IV] 次で定義される関数 $f(s)$ に対して以下の各問いに答えよ。

$$f(s) = \begin{cases} \frac{s}{16} & (0 \leq s \leq 4), \\ -\frac{s}{16} + \frac{1}{2} & (4 < s \leq 8), \\ 0 & (s < 0 \text{ または } 8 < s) \end{cases}$$

問1 関数 $t = f(s)$ のグラフと、関数 $t = f(s)$ のグラフを s 軸方向に 4 だけ平行移動したグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ。答えのみでよい。

問2 関数 $t = f(s)$ に対して $s \geq 0$ を定義域とする関数 $t = F(s)$, $t = G(s)$ を次で定義する。

$$F(s) = \int_0^s f(u) du, \quad G(s) = \int_0^s f(u-4) du$$

関数 $F(s)$, $G(s)$ をそれぞれ求め、これら 2 つの関数のグラフを 1 つの st 平面上に図示せよ。

問3 問2 で求めた関数 $F(s)$, $G(s)$ に対し, $x = G(s)$, $y = F(s)$ とおく。点 (x, y) の描く曲線の概形を xy 平面上に図示せよ。

問4 問2 で求めた関数 $F(s)$, $G(s)$ に対し, xy 平面上の 2 点 $(0, 1)$ と $(x, y) = (G(s), F(s))$ の間の距離の最小値を与える s の値を求めよ。

(計 算 用 紙)

Windom