

令和2年度 入学試験問題

数 学 問 題 用 紙 (前 期)

試験時間	90分
問題用紙	1～8頁

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても、または試験を放棄する場合でも、試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り、鞆の中にしまうこと。
5. 机の上には、受験票と筆記用具（鉛筆、シャープペンシル、消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓、コンパス、定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問、トイレ、体調不良等で用件のある場合は、無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は、問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は、試験の一切を無効とし、試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後、解答用紙は裏返し、問題用紙は持ち帰ること。

受験番号	
------	--

氏 名	
-----	--

[I] 以下の文章の ア ~ ト に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。

実数の定数 a, b ($a > 0$) に対して, 2 次関数 $f(x) = 3ax^2 + 2x + b$ が

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx = 6$$

を満たすとき, $a = \frac{\text{ア} \sqrt{\text{イ}}}{\text{ウ}}$, $b = -\frac{\text{エ} \sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$ である。

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{\text{キ}}{\pi},$$

$$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}},$$

$$\int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{\text{コ}}{\pi} - \frac{\text{サ}}{\pi \text{シ}},$$

であることを用いれば, 定積分

$$\int_{-1}^1 \left\{ \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - (pf(x) + q) \right\}^2 dx$$

が最小となる定数 p, q の値は $p = \frac{\text{ス} \sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}} - \frac{\text{タ} \sqrt{\text{チ}}}{\text{ツ} \pi \text{テ}}$, $q = \text{ト}$ となる。

(計 算 用 紙)

Windom

[II] O を原点とする xyz 空間において以下の各問いに答えよ。

問1 点 $\left(1, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り、ベクトル $\vec{n} = (-2, \sqrt{5}, \sqrt{3})$ に垂直な平面 α の方程式を求めよ。

問2 ベクトル $(0, 0, 1)$ と問1の \vec{n} とのなす角を求めよ。

問3 連立不等式 $z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ で表される図形を、問1の平面 α によって2つの部分に分割するとき、点 $(0, 0, 3)$ を含む部分の体積を求めよ。

Windom

(計 算 用 紙)

Windom

[III] 正の実数 t, k に対して、座標平面上の点 $T_t(k)$ を次で定める。

$$T_t(k) = \left(\frac{k}{1+t^2k^2}, \frac{tk^2}{1+t^2k^2} \right)$$

また、各 k に対して、 t が正の実数全体を動くときの点 $T_t(k)$ の描く曲線を $C(k)$ とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

問1 次の ～ に適する数または式を解答欄に記入せよ。答えのみでよい。

$C(k)$ は点 $(\text{ア}, \text{イ})$ を中心とする、半径が の円の一部である。

問2 各 t に対して、点 $T_t\left(\frac{1}{2}\right)$ における $C\left(\frac{1}{2}\right)$ の法線を $l_1(t)$ 、点 $T_t(1)$ における $C(1)$ の法線を $l_2(t)$ とする。このとき、2直線 $l_1(t)$ 、 $l_2(t)$ の方程式をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問3 問2の2直線 $l_1(t)$ 、 $l_2(t)$ の交点 $P(t)$ の座標を求めよ。答えのみでよい。

問4 t が正の実数全体を動くとき、問3で定めた点 $P(t)$ が描く曲線は、 x 軸上に2つの焦点をもつ楕円の一部であることを示し、その焦点の座標、長軸の長さ、短軸の長さをそれぞれ求めよ。

(計 算 用 紙)

Windom

[IV] 初期時刻 0 で白球が 3 個あり、以下の規則で定まる確率に従って球の色が白から黒、または黒から白に変化するものとする。以下では、各時刻 n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) での白球の個数を $w(n)$ 、黒球の個数を $b(n)$ と表し ($w(n) + b(n) = 3$)、また、実数 x は $0 < x < 1$ を満たすとする。

規則 1: $w(n) = 3$ または $w(n) = 2$ であるとき、時刻 n での各白球は時刻 $n+1$ では $\frac{1}{3}$ の確率で黒球となり、 $\frac{2}{3}$ の確率で白球のままである。また、時刻 n での黒球は時刻 $n+1$ では確率 x で白球となり、確率 $1-x$ で黒球のままである。

規則 2: $w(n) = 1$ であるとき、時刻 n での白球は時刻 $n+1$ では $\frac{2}{3}$ の確率で黒球となり、 $\frac{1}{3}$ の確率で白球のままである。また、時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである。

規則 3: $w(n) = 0$ であるとき、時刻 n での各黒球は時刻 $n+1$ では確率 1 で黒球のままである。

各時刻 n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) に対して、 $w(n) = 3$ である確率を p_n 、 $w(n) = 2$ である確率を q_n 、 $w(n) = 1$ である確率を r_n とする。このとき、以下の各問いに答えよ。

問 1 p_1, q_1 をそれぞれ求めよ。答えのみでよい。

問 2 次の連立漸化式が成り立つように、 $\boxed{\text{ア}}$ \sim $\boxed{\text{エ}}$ に適する、 n に無関係な数または式を解答欄に記入せよ。導出過程についても説明せよ。

$$\begin{cases} p_{n+1} = \boxed{\text{ア}} p_n + \boxed{\text{イ}} q_n, \\ q_{n+1} = \boxed{\text{ウ}} p_n + \boxed{\text{エ}} q_n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

問 3 次の連立漸化式が成り立つような実数 α, β (ただし、 $\alpha < \beta$) の組を求め、 x を用いて表せ。答えのみでよい。

$$\begin{cases} p_{n+2} - (\alpha + \beta)p_{n+1} + \alpha\beta p_n = 0, \\ q_{n+2} - (\alpha + \beta)q_{n+1} + \alpha\beta q_n = 0 \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

問4 数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ の一般項を関数 $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, $I(x)$ を用いて

$$\begin{cases} p_n = F(x)\alpha^n + G(x)\beta^n, \\ q_n = H(x)\alpha^n + I(x)\beta^n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

と表したとき, $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, $I(x)$ を x の関数としてそれぞれ具体的に求めよ。答えのみでよい。

問5 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}$ が存在し, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n} < 1$ が成り立つための x に対する必要十分条件を求めよ。

Windom