

※学士は設問【1】は必須、
【2】又は【3】のいずれか
1問を選択

- 注意事項**
1. 数学(一般)の用紙は3枚である。3枚とも解答すること。
 2. 3枚とも受験番号と氏名の記入を忘れないこと。
 3. 【2】、【3】は、解答の過程を必ず記すこと。

【1】 次の各文の にあてはまる答を求めよ。

(1) p, q を実数の定数、 i を虚数単位とする。 x の方程式

$$x^3 - (p - i)x^2 + (q - pi)x - 2p + \frac{3p}{2}i = 0$$

が $2 + i$ を解にもつとする。このとき、 $p = \text{ア}$ 、 $q = \text{イ}$ である。また、この方程式の $2 + i$ 以外の解を α, β (ただし $|\alpha| < |\beta|$) とおくと、

$$\left(\frac{\beta - i}{\alpha}\right)^7 = \text{ウ}$$

(2) ω を正の定数とする。座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ は時刻 t を媒介変数として、サイクロイド

$$x = 2(\omega t - \sin \omega t), \quad y = 2(1 - \cos \omega t) \quad \left(0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

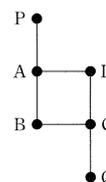
を描くとする。時刻 t における点 P の加速度を \vec{a} とするとき、その大きさは $|\vec{a}| = \text{エ}$ である。また、 $t = 0$ から $t = \frac{2\pi}{\omega}$ までの間に点 P が動く道のりは オ である。原点と点 $(2\pi, 4)$ を通る直線を l とするとき、点 P が描く曲線と直線 l で囲まれた部分の面積は カ である。

(3) O を原点とする座標空間において、点 $A(-1, 0, -4)$ を通り $\vec{a} = (1, 1, 1)$ に平行な直線を l 、点 $B(4, -5, 0)$ を通り $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ に平行な直線を m とする。このとき、次のような、時刻 t における動点 P, Q を考える。動点 P は $t = 0$ で A を出発し、 l 上を \vec{a} の方向に一定の速度で進み $t = 10$ で点 $(9, 10, 6)$ に到達する。一方、動点 Q は、 $t = 0$ から $t = 2$ までは点 B で静止しており、その後、 $t = 2$ で B を出発し、 m 上を \vec{b} の方向に一定の速度で進み $t = 10$ で点 $(0, 3, 0)$ に到達する。 $0 \leq t \leq 10$ における \vec{OP} の各成分を t を用いて表すと キ である。また、 $0 \leq t \leq 10$ における、 $|\vec{PQ}|$ の最小値は ク である。

(4) 方程式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3w} = \frac{7}{3}$ を満たす自然数の組 (x, y, z, w) について考える。 x のとり得る値を全て求めると ケ である。 $x = y = 1$ のとき、自然数の組 (z, w) を全て求めると コ である。自然数の組 (x, y, z, w) のうち、 $xyzw$ の値を最大にするものは サ である。

【2】 図のような経路上に点 A, B, C, D, P, Q がある。点 B と点 D に球を1個ずつ置き、次の操作を繰り返す。

- (操作) $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{経路上に球が置かれている場合、各球を互いに独立に隣接する点へ等しい確率で動かし、各球が同じ点に置かれた場合} \\ \cdot \text{または各球がそれぞれ点Pと点Qに同時に置かれた場合は経路上から球を取り除く。} \\ \cdot \text{経路上に球が置かれていない場合、何もしない。} \end{array} \right.$



n 回目の操作を終えたとき、経路上に球が2個残っている確率を $X_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) X_2 を求めよ。
- (2) X_3 を求めよ。
- (3) 自然数 k に対して、 X_{2k-1} を k を用いて表せ。
- (4) n 回目の操作を終えたとき、それまでの操作で、各球が同時に点 P と点 Q に置かれることにより経路上から取り除かれている確率を求めよ。

【3】 a は $a \geq \frac{1}{2}$ を満たす定数とする。 $f(x)$ は $x > -1$ で定義された関数で $f(0) = 0$ を満たすとする。また、 $x > -1$ で $f(x)$ は微分可能で $f'(x) > 0$ であるとし、 $f'(x)$ も微分可能で $f''(x) < 0$ であるとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線、直線 $x = a - \frac{1}{2}$ 、 $x = a + \frac{1}{2}$ および x 軸で囲まれた部分の面積が $f(a)$ となることを示せ。
- (2) 不等式 $\frac{1}{2} \left\{ f\left(a - \frac{1}{2}\right) + f\left(a + \frac{1}{2}\right) \right\} < \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx < f(a)$ を示せ。
- (3) 自然数 n に対して、不等式 $\int_{\frac{1}{2}}^n f(x) dx < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} f(n)$ を示せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n \log n}}$ を求めよ。