

# 数 学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。  
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。  
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の  にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

袋 A には赤玉 3 個, 白玉 1 個, 袋 B には赤玉 1 個, 白玉 3 個が入っている。「袋 A から 2 個の玉を取り出して袋 B に入れ, 次に, 袋 B から 2 個の玉を取り出して袋 A に入れる」という操作を繰り返す。1 回の操作の後, 袋 A に白玉が 2 個以上ある確率は , 2 回の操作の後, 袋 A の中が白玉だけになる確率は  である。

*Windom*

2.  $p$  を 2 以上の自然数の定数とする。  $n = 2, 3, 4, \dots$  に対して、関数  $f_n(x)$  ( $x > 0$ ) を

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{pn}\right)$$

で定める。例えば、  $p = 2$  のとき

$$f_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{4}\right)$$
$$f_3(x) = \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{4}\right) \left(1 + \frac{x}{5}\right) \left(1 + \frac{x}{6}\right)$$

である。  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ( $x > 0$ ) とおくと、次の問いに答えよ。

(1)  $t \geq 0$  のとき、不等式  $\frac{t}{1+t} \leq \log(1+t) \leq t$  が成り立つことを示せ。ただし、対数は自然対数とする。

(2)  $f(x)$  を求めよ。

*Windom*

3. 次の問いに答えよ。

- (1)  $a, b, n$  は自然数の定数で,  $b$  は 4 の倍数ではなく,  $n \geq 2$  とする。  
 $a$  が  $2^n$  の倍数であるが,  $2^{n+1}$  の倍数ではないとき,  $a(a+b), 2a(2a+b)$  のいずれかは,  
 $2^{n+1}$  の倍数であるが,  $2^{n+2}$  の倍数ではないことを示せ。
- (2)  $b$  は自然数の定数で, 4 の倍数ではないとする。  
3 以上の任意の自然数  $n$  に対して, 次をみたす自然数  $a_n$  が存在することを示せ。

$\frac{a_n(a_n + b)}{2^{2n}}$  は, 小数第  $n$  位の数字が 5 である小数第  $n$  位までの有限小数で表される。

*Windom*

4.  $O$  を原点とする  $xyz$  空間内に,  $xy$  平面上の放物線  $y = x^2$  を  $y$  軸のまわりに回転してできる曲面  $S$  と, 正四面体  $OABC$  があり, 条件「3 頂点  $A, B, C$  は  $S$  上にある」をみたしている。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 正四面体  $OABC$  の 1 辺の長さを求めよ。
- (2) 正四面体  $OABC$  が条件をみたしながら動くとき,  $xy$  平面による正四面体  $OABC$  の切り口の面積の最小値を求めよ。

*Windom*