

令和2年度 入学者選抜試験問題

一般入学試験

数 学 (70分)

I 注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は16ページあります。ただし、出題ページは下記のとおりです。
4, 6, 8, 10, 12ページ
- 3 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督員に知らせなさい。
- 4 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
 - ① 受験番号欄
受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしなさい。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
 - ② 氏名欄
氏名・フリガナを記入しなさい。
- 5 試験開始後30分間および試験終了前5分間は退出できません。
- 6 この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。この問題冊子は試験終了後回収します。

II 解答上の注意

- 1 「解答上の注意」が、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

受 験 番 号			

1 次の問いに答えなさい。

- (1) 座標平面上で方程式 $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 = 4$ を満たす点 (x, y) の集合を C とする。集合 C に属する点 P について、原点 O との距離 OP の最大値および最小値を次の手順で求める。

$OP = r (r > 0)$, x 軸の正の部分から半直線 OP までの回転角を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とすると、点 P の座標は $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表すことができる。 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおいて、 $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2$ を r と θ を用いて表すと

$$\begin{aligned} & 7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 \\ &= r^2 \left(\boxed{\text{ア}} \cos 2\theta + \boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}} \sin 2\theta + \boxed{\text{エ}} \right) \\ &= r^2 \left\{ \boxed{\text{オ}} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}} \right) + \boxed{\text{エ}} \right\} \end{aligned}$$

となる。これより OP は、 θ の範囲に注意すると、 $\theta = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi, \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi$

のとき最大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとり、 $\theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi, \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi$ のとき最小値 $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$

をとることがわかる。

ただし、 $\boxed{\text{キ}} < \boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{サ}} < \boxed{\text{ス}}$ とする。

- (2) 双曲線 $H: x^2 - y^2 = 1$ と直線 $\ell: y = k(x - 1) + 3$ (k は定数) について、

H と ℓ がただ 1 つの共有点をもつような定数 k の値は $k = \pm \boxed{\text{タ}}$, $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ で

ある。また、 H と ℓ が異なる 2 点 A, B で交わる時、 A, B の x 座標をそれぞれ α, β とする。 $\alpha + \beta$ の値を k を用いて表すと

$$\alpha + \beta = \frac{\boxed{\text{テ}} k^2 - \boxed{\text{ト}} k}{k^2 - \boxed{\text{ナ}}}$$

であり、点 $Q(1, 3)$ について、 $AQ = BQ$ を満たす定数 k の値は $k = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

2 実数 x, y についての2つの不等式

$$2^{3x+3y+1} + 2^{-3x-3y+1} + 4^{x+y} + 4^{-x-y} - 5(2^{x+y} + 2^{-x-y}) - 8 \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\log_2 x)^2 \leq \log_2 x^2 - \log_x 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

がある。

$t = 2^{x+y} + 2^{-x-y}$ とおく。①の左辺を t で表すと

$$\boxed{\text{ア}} t^3 + t^2 - \boxed{\text{イウ}} t - \boxed{\text{エオ}}$$

である。

条件①の下で、 t のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{カ}} \leq t \leq \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であり、 $x + y$ のとりうる値の範囲は

$$- \boxed{\text{ケ}} \leq x + y \leq \boxed{\text{コ}}$$

である。

$s = \log_2 x$ とおく。条件②の下で、 s のとりうる値の範囲は

$$- \boxed{\text{サ}} \leq s < \boxed{\text{シ}}$$

である。よって、不等式②の解は

$$\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \leq x < \boxed{\text{ソ}}$$

である。

実数 x, y が不等式①と②をともに満たすとき

$$3x + 2y \text{ の最小値は } \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

3 白玉と赤玉があり、各玉には番号が1つずつ書かれている。正の整数 k について、番号 k の書かれた白玉を白 k 、番号 k の書かれた赤玉を赤 k などと略記する。

(1) 白1, 白2, 白3, 赤1, 赤2, 赤3 の計6個の玉の円順列を作る。

(i) どの同じ番号の玉も隣り合う確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イウ}}$ である。

(ii) 白1と赤1が向かい合う確率は $\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ であり、白1と赤1が向かい合い、

かつどの同じ番号の玉も隣り合わない確率は $\frac{\text{カ}}{\text{キク}}$ である。

また、どの同じ番号の玉も隣り合わない確率は $\frac{\text{ケ}}{\text{コサ}}$ である。

(iii) 同じ番号の玉がちょうど1組隣り合う確率は $\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$ である。

(2) 白1, 白2, 白3, 白4, 赤1, 赤2, 赤3, 赤4 の計8個の玉の円順列を作るとき、

どの同じ番号の玉も隣り合わない確率は $\frac{\text{セソ}}{\text{タチツ}}$ である。

- 4 三角形 ABC は $AB = 4$, $AC = 5$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5$ を満たしている。
 三角形 ABC の外心を O, 外接円を K とする。

- (1) $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = \boxed{\text{ア}}$ である。また, \vec{AO} を \vec{AB} , \vec{AC} を用いて表すと

$$\vec{AO} = \frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エオ}}} \vec{AB} + \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}} \vec{AC}$$

である。

- (2) 円 K の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を三角形 DBC の面積が最大となるようにとり, 線分 AD と線分 BC との交点を E とする。

このとき, \vec{AE} を \vec{AB} , \vec{AC} を用いて表すと

$$\vec{AE} = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \vec{AB} + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \vec{AC}$$

である。また, $\vec{AD} = t \vec{AE}$ (t は実数) とおくと, t の値は $t = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

- (3) (2) の D について, 線分 BC 上に $\vec{PO} \cdot \vec{PD} = 0$ かつ $BP > CP$ を満たす点 P をとる。このとき

$$\frac{CP}{BP} = \frac{\boxed{\text{ツ}} - \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

5 関数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}[x] - \left[\frac{1}{2}x \right] \right) \left| \cos \frac{\pi}{2}x \right|$ ($x \geq 0$) がある。ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $0 \leq x < 1$ のとき $f(x) = \boxed{\text{ア}}$, $1 \leq x < 2$ のとき

$$f(x) = \frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

$\cos \frac{\pi}{2}x$ である。

n を正の整数とする。 $y = f(x)$ のグラフと x 軸, および直線 $x = 2n$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n とすると,

$$V_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}} \text{ であり, } \sum_{k=1}^{4n} V_k = \frac{\pi n}{\boxed{\text{カ}}} \text{ である。}$$

$$(2) \int e^{-x} \cos \frac{\pi}{2} x dx = \frac{\boxed{\text{キ}} e^{-x}}{\pi \boxed{\text{ク}} + \boxed{\text{ケ}}} \left(\pi \sin \frac{\pi}{2} x - \boxed{\text{コ}} \cos \frac{\pi}{2} x \right) + C$$

である。ここで、 C は積分定数である。

(3) $y = e^{-x} f(x)$ のグラフと x 軸, および直線 $x = 2n$ (n は正の整数) で囲まれる図形の面積を T_n とすると

$$T_1 = \frac{1}{\pi \boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{シ}}} \left(\frac{\pi}{\boxed{\text{ス}}} - \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}} \boxed{\text{タ}}} \right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\boxed{\text{チ}} \pi - \boxed{\text{ツ}}}{\left(\pi \boxed{\text{テ}} + \boxed{\text{ト}} \right) \left(\boxed{\text{ナ}} \boxed{\text{ニ}} - \boxed{\text{ヌ}} \right)}$$

である。

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

問題の文中の **ア** , **イウ** などには, 特に指示がない限り, 数字 (0~9), 符号 (-, ±), 自然対数の底 (e) のいずれかが入ります。ア, イ, ウ, …のの一つ一つが, これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えなさい。

なお, 解答用紙に5つある解答欄の左肩の数字は, それぞれ大問の番号を表します。

例1 **アイウ** に -83 と答えたいとき。

1	解 答 欄												
	-	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	●	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	e
イ	-	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	●	⑨	e
ウ	-	±	0	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	e

分数形で解答する場合は, 既約分数で答えなさい。符号は分子につけ, 分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは, $\frac{-4}{5}$ として答えなさい。

1	解 答 欄												
	-	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	●	±	0	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	e
オ	-	±	0	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	e
カ	-	±	0	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	e