Windomの解答速報 東京慈恵会医科大学数学

1\. (1)

(ア) Bが勝つのは

白→白　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

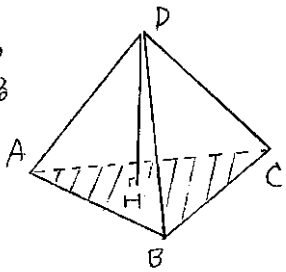
赤→白→白
白→赤→白 } ${}_2C_1\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

赤→赤→白→白
赤→白→赤→白
白→赤→赤→白 } ${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

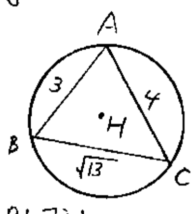
$\frac{1}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}=\frac{11}{27}$

(イ) Aが3回で勝つのは
3回共赤の時だから $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$
Bが3回で勝つのは $\frac{4}{27}$
3回で終了するのは
$\frac{8}{27}+\frac{4}{27}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$

(2) 図をDの真上から見るとDとHは重なるので，



$DA=DB=DC=3$より
$HA=HB=HC$
従って，Hは△ABCの外心
ここで余弦定理から



$\cos A=\frac{9+16-13}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}$

$A=60°$

△ABCの外接円の半径をRとすると，
正弦定理から

$\frac{BC}{\sin A}=2R$

$R=\frac{\sqrt{13}}{2\sin60°}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\ (=HA=HB=HC)$

(ウ) $DH=\sqrt{DA^2-HA^2}$
$=\sqrt{9-\frac{13}{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$

(エ)
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\sin60°=3\sqrt{3}$

従って，体積は
$\frac{1}{3}(\triangle ABC)\times DH$
$=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}=\sqrt{14}$

2\.

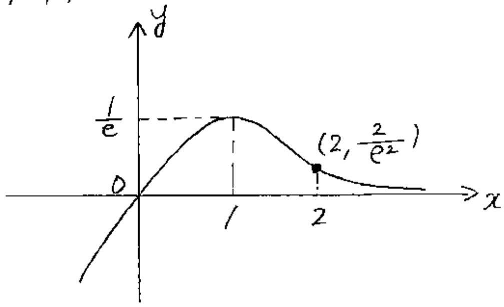
(1) $y=xe^{-x}$
$y'=(1-x)e^{-x}$
$y''=(x-2)e^{-x}$

x		1		2	
y'	+	0	−	−	−
y''	−	−	−	0	+
y	↗	極大	↘	変曲点	↘

極大値　$y_{(x=1)}=\frac{1}{e}$
$y_{(x=2)}=\frac{2}{e^2}$より変曲点 $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$

$\lim_{x\to\infty}y=0,\quad \lim_{x\to-\infty}y=-\infty$

グラフは



(2) $xe^{-x}-ae^{-x}=(x-a)e^{-x}$

$a>0$, $1\leqq x\leqq 2$ だから

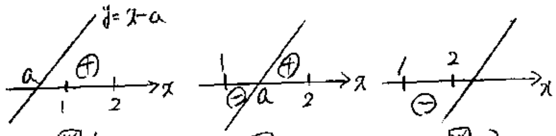


図1　図2　図3

(i) $0<a\leqq 1$ (図1) の時

$$S(a)=\int_1^2 (x-a)e^{-x}dx$$
$$=\left[(-x+a-1)e^{-x}\right]_1^2$$
$$=(a-3)e^{-2}-(a-2)e^{-1}$$
$$=\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\right)a-\frac{3}{e^2}+\frac{2}{e}$$

(ii) $1\leqq a\leqq 2$ (図2) の時

$$S(a)=-\int_1^a(x-a)e^{-x}dx+\int_a^2(x-a)e^{-x}dx$$
$$=-\left[(-x+a-1)e^{-x}\right]_1^a+\left[(-x+a-1)e^{-x}\right]_a^2$$
$$=e^{-a}+(a-2)e^{-1}+(a-3)e^{-2}+e^{-a}$$
$$=2e^{-a}+\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}\right)a-\left(\frac{2}{e}+\frac{3}{e^2}\right)$$

(iii) $a\geqq 2$ (図3) の時

$$S(a)=-\int_1^2(x-a)e^{-x}dx$$
$$=\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)a+\frac{3}{e^2}-\frac{2}{e}$$

以上から

$$S(a)=\begin{cases}\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\right)a-\frac{3}{e^2}+\frac{2}{e} & (0<a\leqq 1)\\ 2e^{-a}+\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}\right)a-\left(\frac{2}{e}+\frac{3}{e^2}\right) & (1\leqq a\leqq 2)\\ \left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)a+\frac{3}{e^2}-\frac{2}{e} & (a\geqq 2)\end{cases}$$

(3)

$$S'(a)=\begin{cases}\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}=\frac{1-e}{e^2}<0 & (0<a\leqq 1)\\ -2e^{-a}+\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}\right) & (1\leqq a\leqq 2)\\ \frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=\frac{e-1}{e^2}>0 & (a\geqq 2)\end{cases}$$

$1\leqq a\leqq 2$ のとき $S'(a)=0$ となるaは

$$-2e^{-a}+\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}\right)=0$$
$$e^{-a}=\frac{e+1}{2e^2}$$
$$a=-\log\frac{e+1}{2e^2}\ \text{……※}$$

ここで

$$\frac{e}{2e^2}<\frac{e+1}{2e^2}<\frac{e+e}{2e^2}$$
$$\frac{1}{2e}<\frac{e+1}{2e^2}<\frac{1}{e}$$
$$-\log 2-1<\log\frac{e+1}{2e^2}<-1$$
$$1<-\log\frac{e+1}{2e^2}<1+\log 2<2$$

※は $1\leqq a\leqq 2$ をみたす

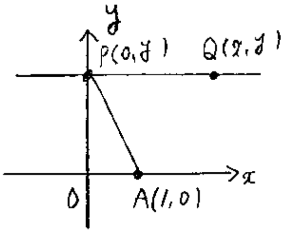
a	(0)		1		$-\log\frac{e+1}{2e^2}$		2	
$S'(a)$		−	−	−	0	+	+	+
$S(a)$		↘		↘	極小	↗		↗

$a=-\log\frac{e+1}{2e^2}$ で $S(a)$ は

極小かつ最小となる。

3.

(1) $P(0, y)$ $Q(x, y)$ とする。



(ア) $AP+PQ \leqq m$ より

$$\sqrt{1+y^2}+|x| \leqq m \quad \text{——}(*)$$

また、$D(2)$は

$$\sqrt{1+y^2}+|x| \leqq 2 \quad \text{——}①$$

①で xの所を$-x$，yの所を$-y$としても式は同じだから ①のグラフは両軸対称。

$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の時を考える。

このとき ①は

$$\sqrt{1+y^2}+x \leqq 2 \quad \text{——}①'$$

$$\sqrt{1+y^2} \leqq 2-x$$

両辺を平方して

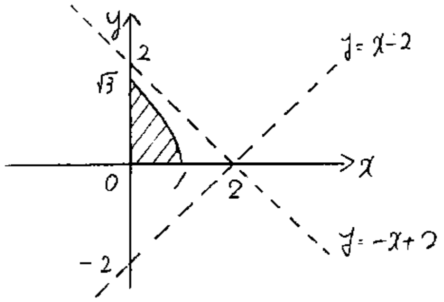
$$1+y^2 \leqq (2-x)^2$$

$$(x-2)^2-y^2 \geqq 1$$

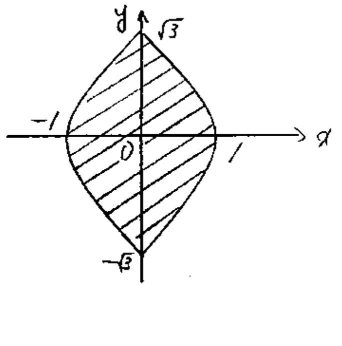
また、①'で $\sqrt{1+y^2} \geqq 1$ だから

$$0 \leqq x \leqq 1$$

従って $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の範囲でのグラフは



グラフの対称性から $D(m)$は



(2) 領域$(*)$の $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の部分は

$$\sqrt{1+y^2}+x \leqq m$$

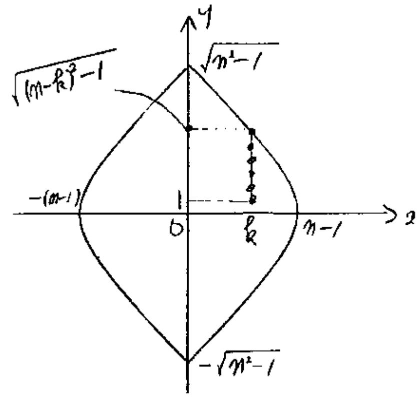
$$(x-m)^2-y^2 \geqq 1$$

$\sqrt{1+y^2} \geqq 1$ より $0 \leqq x \leqq m-1$

$x=0$ のときは

$$0 \leqq y \leqq \sqrt{m^2-1}$$

$(*)$は両軸対称だから



$[x]$は xを超えない最大の整数とする。

第1象限部分の格子点を考える。

（座標軸上の格子点はあとで加える）

$x=k$ $(1 \leqq k \leqq m-2)$ 上の格子点は

$y=1, 2, 3, \cdots\cdots, \left[\sqrt{(m-k)^2-1}\right]$

の $\left[\sqrt{(m-k)^2-1}\right]$ 個あるので

第1象限部分の格子点は

$$\sum_{k=1}^{m-2}\left[\sqrt{(m-k)^2-1}\right]$$

第2, 3, 4象限部分の格子点も同じ

次に y軸上の格子点は

$$2\left[\sqrt{m^2-1}\right]+1 \text{ 個}$$

x軸上の格子点は $2(m-1)$個

従って 全格子点 $S(n)$ は

$$4\sum_{k=1}^{n-2}\left[\sqrt{(n-k)^2-1}\right]+2\left[\sqrt{n^2-1}\right]+1+2(n-1)$$

$$=4\sum_{k=1}^{n-2}\left[\sqrt{(n-k)^2-1}\right]+2\left[\sqrt{n^2-1}\right]+2n-1 \text{ 個}$$

次に $(n-k-1)^2<(n-k)^2-1<(n-k)^2$ だから

$$n-k-1<\sqrt{(n-k)^2-1}<n-k$$

$$n-k-1\leqq\left[\sqrt{(n-k)^2-1}\right]<n-k$$

$$\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)\leqq\sum_{k=1}^{n-2}\left[\sqrt{(n-k)^2-1}\right]<\sum_{k=1}^{n-2}(n-k)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)=\frac{(n-2+1)(n-2)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-2}(n-k)=\frac{(n-1+2)(n-2)}{2}=\frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

従って

$$4\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}\leqq4\sum_{k=1}^{n-2}\left[\sqrt{(n-k)^2-1}\right]<4\frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

$$2(n-1)(n-2)\leqq4\sum_{k=1}^{n-2}\left[\sqrt{(n-k)^2-1}\right]<2(n+1)(n-2)$$

$$\frac{2(n-1)(n-2)}{(2n+1)^2}\leqq\frac{4\sum_{k=1}^{n-2}\left[\sqrt{(n-k)^2-1}\right]}{(2n+1)^2}<\frac{2(n+1)(n-2)}{(2n+1)^2}$$

$n\longrightarrow\infty$ の時 $\dfrac{2(n-1)(n-2)}{(2n+1)^2}\longrightarrow\dfrac{1}{2}$

$$\frac{2(n+1)(n-2)}{(2n+1)^2}\longrightarrow\frac{1}{2}$$

「はさみうち」から

$$\frac{4\sum_{k=1}^{n-2}\left[\sqrt{(n-k)^2-1}\right]}{(2n+1)^2}\longrightarrow\frac{1}{2}$$

次に $(n-1)^2<n^2-1<n^2$ だから

$$n-1<\sqrt{n^2-1}<n$$

$$n-1\leqq\left[\sqrt{n^2-1}\right]<n$$

$$\frac{2(n-1)}{(2n+1)^2}\leqq\frac{2\left[\sqrt{n^2-1}\right]}{(2n+1)^2}<\frac{2n}{(2n+1)^2}$$

$n\longrightarrow\infty$ のとき $\dfrac{2(n-1)}{(2n+1)^2}\longrightarrow0$

$$\frac{2n}{(2n+1)^2}\longrightarrow0$$

「はさみうち」から

$$\frac{2\left[\sqrt{n^2-1}\right]}{(2n+1)^2}\longrightarrow0$$

また

$$\frac{2n-1}{(2n+1)^2}\longrightarrow0\quad(n\to\infty)$$

以上から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2}$$

4.

$A(2,1,2)$ $P(x,y,z)$ とする。

$|\overrightarrow{OA}|=3$ だから $|\overrightarrow{OP}|=3$

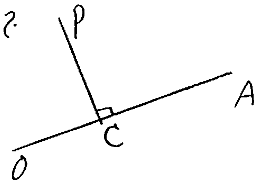
従って $x^2+y^2+z^2=9$ ---- ①

次に $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\frac{\pi}{3}$ だから

$2x+y+2z=\frac{9}{2}$ ---- ②

(1)

(ア) C は OA 上にあるので



$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2k\\k\\2k\end{pmatrix}$

(k は実数)

$\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}x-2k\\y-k\\z-2k\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CP}$ だから $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}=0$

$2(x-2k)+(y-k)+2(z-2k)=0$

$2x+y+2z-9k=0$

②を代入して

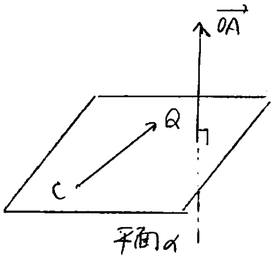
$\frac{9}{2}-9k=0$ $k=\frac{1}{2}$

従って $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$C(1,\frac{1}{2},1)$

(イ, ウ)

C を通り, $\overrightarrow{OA}$ に垂直な平面 α 上の点を $Q(x,y,z)$ とすると



$\overrightarrow{CQ}\perp\overrightarrow{OA}$ だから

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$

$2(x-1)+(y-\frac{1}{2})+2(z-1)=0$

$2x+y+2z=\frac{9}{2}$ ---- (#1)

$G(0,0,s)$ $H(1,2,t)$ が平面 (#1) 上にあるので

$$\begin{cases}2s=\frac{9}{2}\\2+2+2t=\frac{9}{2}\end{cases}$$

$\Longrightarrow s=\frac{9}{4},\ t=\frac{1}{4}$

(2) ②より $z=\frac{9}{4}-(x+\frac{1}{2}y)$

これを①へ代入して

$x^2+y^2+\{\frac{9}{4}-(x+\frac{1}{2}y)\}^2=9$

$2x^2+\frac{5}{4}y^2+xy-\frac{9}{2}x-\frac{9}{4}y-\frac{63}{16}=0$

---- (3)

このとき $y-2x=k$ とおくと

$y=2x+k$

(3)へ代入して

$2x^2+\frac{5}{4}(2x+k)^2+x(2x+k)-\frac{9}{2}x$
$-\frac{9}{4}(2x+k)-\frac{63}{16}=0$

$9x^2+(6k-9)x+\frac{5}{4}k^2-\frac{9}{4}k-\frac{63}{16}=0$ ---(*)

x の実数条件から (*) の判別式 $\geqq 0$

$D=(6k-9)^2-4\cdot 9(\frac{5}{4}k^2-\frac{9}{4}k-\frac{63}{16})\geqq 0$

$-9k^2-2\cdot 6\cdot 9k+81k+81+\frac{9\cdot 63}{4}\geqq 0$

$k^2+3k-\frac{99}{4}\leqq 0$

$4k^2+12k-99\leqq 0$

$\frac{-6-12\sqrt{3}}{4}\leqq k\leqq\frac{-6+12\sqrt{3}}{4}$

$\frac{-3-6\sqrt{3}}{2}\leqq k\leqq\frac{-3+6\sqrt{3}}{2}$

[講評]

新課程初年度だが，新たに加わった「複素数平面」などは出題されず，例年通りの出題分野となっている。

1. (1) 確率

(2) 四面体の高さ，体積

2. 関数のグラフと面積，及び面積を最小

3. 不等式と領域，及び領域内の格子点と極限

4. 空間の平面と関数の値域

計算量，レベルも例年通り。

試験時間を考えると

1 1) 2)　2 1) 2) 3)　3 1)　4 1)

を確実に得点して70%位が合格ラインと考えられる。