1

次の[　　]にあてはまる適切な数値、または行列を解答欄に記入せよ。

(1)　1から10までの数字が1ずつ記入された10枚のカードから3枚のカードを同時に取り出す。取り出したカードに記入してある3つの数の最小値をX, 最大値をYとすると$Y=2X$となる確率は[(ア)]である。また、$Y<2X$となる確率は[(イ)]である。

(2)　実数を成分とする2次の正方行列Aの表す1次変換(点の移動)fによって、xy平面上の点P$(1,-1)$は点Qに、点Qは点R$(-1,0)$に、点Rは点Pにそれぞれ移される。

このとき行列Aは[ウ], 点Qの座標は([エ], [オ])である。

(ア) $\dfrac{1}{12}$　(イ) $\dfrac{1}{6}$　(ウ) $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$　(エ) 0　(オ) 1

解説

(1)　${}_{10}C_2=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$通り

$Y=2X$の確率

$(X,Y)=(1,2)$の時。なし

$(X,Y)=(2,4)$の時。$(2,3,4)$　1通り

$(X,Y)=(3,6)$の時。$(3,4,6)$, $(3,5,6)$　2通り

$(X,Y)=(4,8)$の時。$(4,5,8)$, $(4,6,8)$, $(4,7,8)$　3通り

$(X,Y)=(5,10)$の時。$(5,6,10)$, $(5,7,10)$, $(5,8,10)$, $(5,9,10)$　4通り

$$P(Y=2X)=\frac{1+2+3+4}{120}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

$Y<2X$の確率

$X=1$の時。$Y<2$　なし

$X=2$の時。$Y<4$　なし

$X=3$の時。$Y<6$　残り2個は4,5より2個　${}_2C_2=1$通り。

$X=4$の時。$Y<8$　残り2個は5,6,7より2個　${}_3C_2=3$通り。

$X=5$の時。$Y<10$　残り2個は6,7,8,9より2個　${}_4C_2=6$通り。

$X=6$の時。$Y\leqq10<12$　残り2個は7,8,9,10より2個　${}_4C_2=6$通り。

$X=7$の時。$Y\leqq10<14$　残り2個は8,9,10より2個　${}_3C_2=3$通り。

$X=8$の時。$Y\leqq10<16$　残り2個は9,10より2個　${}_2C_2=1$通り。

$X=9$の時。$Y\leqq10<18$　なし

$X=10$の時。$Y\leqq10<20$　なし

$$P(Y<2X)=\frac{1+3+6+6+3+1}{120}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

(2)　Q(X,Y)とおく。題意より

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\cdots①\quad A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\cdots②\quad A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdots③$$

となる。①と③より、

$$A\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & 1\\ Y & -1\end{pmatrix}$$

であり、$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{0-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$を右からかけると

$$A=\begin{pmatrix}X & 1\\ Y & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -X-1\\ 1 & -Y+1\end{pmatrix}\cdots④$$

②より、

$$\begin{pmatrix}-1 & -X-1\\ 1 & -Y+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-X-XY-Y=-1\\ X-Y^2+Y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X+XY+Y=1\cdots⑤\\ X=Y^2-Y\cdots⑥\end{cases}$$

⑥を⑤に代入すると

$$Y^2-Y+(Y^2-Y)Y+Y=1\Leftrightarrow Y^3=1$$

Yは実数なので、$Y=1$に限る。このとき⑥より$X=1-1=0$。

よって、Q$(X,Y)=(0,1)$　これを④に代入すると、

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -0-1\\ 1 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$

a, bは実数で$0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$とする。関数$f(x)$, $g(x)$を

$$f(x) = \log(a^2 + x^2), \qquad g(x) = x^2 + b$$

と定める。xy平面上の2曲線$y = f(x)$, $y = g(x)$の$x \geqq 0$の部分をそれぞれC_1, C_2とし、C_1の変曲点Pのx座標を$t(a)$とする。C_2が点Pを通るとき、次の問いに答えよ。
ただし、対数は自然対数である。

(1) (i) C_1の凹凸を調べ$t(a)$をaを用いて表せ。また、bをaを用いて表せ。

(ii) $a = \dfrac{1}{2}$のとき、C_1の概形をxy平面上に描け(xy平面は解答用紙にある)。

なお、$0.6 < \log 2 < 0.7$であることを概形を描く際の参考にしてよい。

(2) $0 \leqq x \leqq t(a)$をみたす実数xに対して、$f(x)$と$g(x)$の大小関係を調べよ。

(3) $0 \leqq x \leqq t(a)$の範囲で、C_1, C_2およびy軸で囲まれた部分の面積$S(a)$をaを用いて表せ。また、aが$0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$の範囲を動くとき、$S(a)$の最大値とそのときの$a$の値を求めよ。

(1)(i) $0 \leqq x < a$のとき、$f''(x) > 0$ より下に凸　$a < x$のとき、$f''(x) < 0$ より上に凸

$t(a) = a$, $b = \log(2a^2) - a^2$　(ii) 略

(2) $f(x) \leqq g(x)$

(3) $S(a) = -\dfrac{2}{3}a^3 + \dfrac{4-\pi}{2}a$　$a = \dfrac{\sqrt{4-\pi}}{2}$の時最大値$= \dfrac{1}{6}(4-\pi)\sqrt{4-\pi}$

解説

(1)(i) $f(x) = \log(a^2 + x^2)$より、

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + a^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + a^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{-2(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{-2(x + a)(x - a)}{(x^2 + a^2)}$$

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	0	+	+	+
$f''(x)$	+	+	0	−
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(a)$	↗

$0 \leqq x < a$のとき、$f''(x) > 0$ より下に凸
$a < x$のとき、$f''(x) < 0$ より上に凸
変曲点のx座標は$f''(x) = 0$を$x \geqq 0$で解いて

$$t(a) = a$$

また、$f(a) = \log(2a^2)$であり、$y = g(x)$が$(a, \log(2a^2))$を通るので、

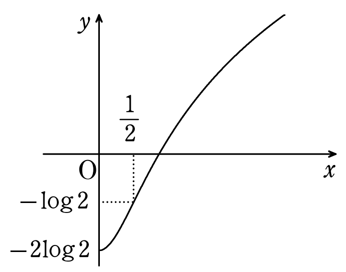
$$\log(2a^2) = a^2 + b \Leftrightarrow b = \log(2a^2) - a^2$$

(ii) $x > 0$のとき$f'(x) > 0$なので、$f(x)$は単調増加。

$a = \dfrac{1}{2}$より、$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\log 2$

よって変曲点は$\left(\dfrac{1}{2}, -\log 2\right)$となる。

$f(0) = -2\log 2$よりy切片は$(0, -2\log 2)$となる。
よってグラフは右図の通り。



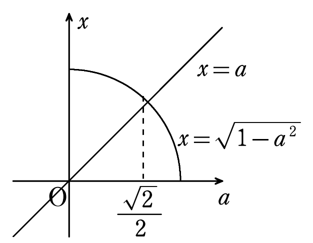
(2) $F(x) = f(x) - g(x)$とおく。

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2 + a^2} - 2x = \frac{-2x(x^2 + a^2 - 1)}{x^2 + a^2}$$

$x > 0$で$F'(x) = 0$を解くと、$x = \sqrt{1 - a^2}$となる。

$0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$より、$a \leqq \sqrt{1 - a^2}$なので、

$0 < x < a \leqq \sqrt{1 - a^2}$で$F'(x) > 0$ゆえ$F(x)$は単調増加。



$F(a) = \log(2a^2) - (a^2 + \log(2a^2) - a^2) = 0$
よって、$F(x) \leqq F(a) = 0$ よって、$f(x) \leqq g(x)$

(3) $S(a) = \displaystyle\int_0^a \{(x^2 + b) - \log(a^2 + x^2)\}dx$ $\cdots$①

$$\int_0^a (x^2 + b)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + bx\right]_0^a = \frac{1}{3}a^3 + ab = \frac{1}{3}a^3 + a(\log(2a^2) - a^2)$$

$$= a\log(2a^2) - \frac{2}{3}a^2$$

$$\int_0^a \log(a^2 + x^2)dx = \Big[x\log(a^2 + x^2)\Big]_0^a - 2\int_0^a \frac{x^2}{a^2 + x^2}dx$$

$$= a\log(2a^2) - 2\int_0^a \frac{x^2}{a^2 + x^2}dx$$

ここで、$x = a\tan\theta$とおくと、$dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \to a$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{4}$

であり

$$\int_0^a \frac{x^2}{a^2 + x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2\tan^2\theta}{a^2 + a^2\tan^2\theta} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta = a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\, d\theta$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)d\theta = a\Big[\tan\theta - \theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = a\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

よって、

$$① = a\log(2a^2) - \frac{2}{3}a^2 - \left\{a\log(2a^2) - 2a\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right\} = -\frac{2}{3}a^3 + \frac{4-\pi}{2}a$$

このとき、$S'(a) = -2a^2 + \dfrac{4-\pi}{2}$であり、$S'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{4-\pi}{4}$

$a > 0$より$a = \dfrac{\sqrt{4-\pi}}{2}$となる。増減表は以下のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{4-\pi}}{2}$	$\cdots$
$S'(a)$		+	0	−
$S(a)$		↗	極大	↘

よって、$S(a)$は$a = \dfrac{\sqrt{4-\pi}}{2}$で極大かつ最大となる。

$$\text{最大値} = S\left(\frac{\sqrt{4-\pi}}{2}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(4-\pi)\sqrt{4-\pi}}{8} + \frac{4-\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-\pi}}{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)(4-\pi)\sqrt{4-\pi} = \frac{1}{6}(4-\pi)\sqrt{4-\pi}$$

$\boxed{3}$

すべての実数xに対して$-\sqrt{2}\,a(\sin x+\cos x)+4b\sin x\cos x-4\leqq 0$が成り立つような実数の組$(a,\,b)$の存在する範囲を$D$とする。このとき、次の問いに答えよ。

問い(2)では$\boxed{}$に当てはまる適当な数値を解答欄に記入せよ。

(1)　Dを求め、ab平面上に図示せよ(ab平面は解答用紙にある)。

(2)　$(a,\,b)$がD内を動くとき、$\dfrac{b+1}{a+4}$のとり得る値の範囲は

$\boxed{（カ）}\leqq\dfrac{b+1}{a+4}\leqq\boxed{（キ）}$である。

(1)　略　(2)　(カ)　$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(キ)　$\dfrac{3}{4}$

解説

(1)　$-\sqrt{2}\,a(\sin x+\cos x)+4b\sin x\cos x-4\leqq 0$ …①

$\sin x+\cos x=t$とおくと$2\sin x\cos x=t^2-1$となるので、①は

$$-\sqrt{2}\,at+2b(t^2-1)-4\leqq 0 \Leftrightarrow 2bt^2-\sqrt{2}\,at-2b-4\leqq 0 \quad \cdots②$$

となる。ここで、$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$だから、$x$が全ての実数を動くとき、

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2} \quad \cdots③$$

である。つまり、③の範囲で常に②が成り立つ条件を考えれば良い。

(ア)　$b=0$の時。

$$② \Leftrightarrow \sqrt{2}\,at+4\geqq 0 \Leftrightarrow at+2\sqrt{2}\geqq 0$$

$g(t)=at+2\sqrt{2}$ とおくと、③の範囲で常に$g(t)\geqq 0$となる条件は

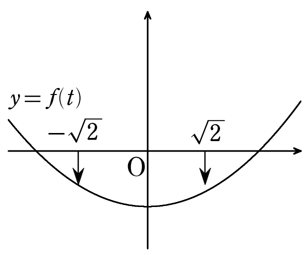
$g(\sqrt{2})\geqq 0$ かつ $g(-\sqrt{2})\geqq 0$だから

$$-2\leqq a\leqq 2$$

(イ)　$b>0$の時。

②を$2b>0$で割ると

$$t^2-\frac{a}{\sqrt{2}\,b}t-1-\frac{2}{b}\leqq 0 \quad \cdots④$$



となる。$f(t)=t^2-\dfrac{a}{\sqrt{2}\,b}t-1-\dfrac{2}{b}$ とおく。

③の範囲で常に④が成り立てばよいので、求める条件は

$$f(\sqrt{2})\leqq 0 \text{ かつ } f(-\sqrt{2})\leqq 0$$

である(右上図参照)。即ち、

$$b\leqq a+2 \text{ かつ } b\leqq -a+2$$

(ウ)　$b<0$の時。

②を$2b<0$で割ると

$$t^2-\frac{a}{\sqrt{2}\,b}t-1-\frac{2}{b}\geqq 0 \quad \cdots⑤$$

となる。$f(t)=\left(t-\dfrac{a}{2\sqrt{2}\,b}\right)^2-\dfrac{a^2}{8b^2}-1-\dfrac{2}{b}$ なので、軸は$t=\dfrac{a}{2\sqrt{2}\,b}$ となる。

(i)　$t=\dfrac{a}{2\sqrt{2}\,b}\leqq-\sqrt{2} \Leftrightarrow a\geqq -4b \Leftrightarrow b\geqq -\dfrac{1}{4}a$の時

③の範囲での$f(t)$の最小値は$f(-\sqrt{2})$なので、求める条件は

$$f(-\sqrt{2})\geqq 0 \Leftrightarrow b\leqq -a+2$$

(ii)　$t=\dfrac{a}{2\sqrt{2}\,b}\geqq\sqrt{2} \Leftrightarrow a\leqq 4b \Leftrightarrow b\geqq\dfrac{1}{4}a$の時

③の範囲での$f(t)$の最小値は$f(\sqrt{2})$なので、求める条件は

$$f(\sqrt{2})\geqq 0 \Leftrightarrow b\leqq a+2$$

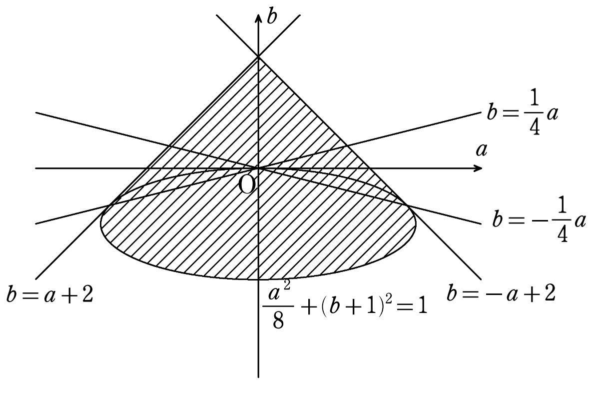
(iii)　$-\sqrt{2}\leqq\dfrac{a}{2\sqrt{2}\,b}\leqq\sqrt{2} \Leftrightarrow -4b\geqq a\geqq 4b \Leftrightarrow b\leqq -\dfrac{1}{4}a$ かつ $b\leqq\dfrac{1}{4}a$の時

③の範囲での$f(t)$の最小値は$f\left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}\,b}\right)$なので、求める条件は

$$f\left(\frac{a}{2\sqrt{2}\,b}\right)\geqq 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{8b^2}-1-\frac{2}{b}\geqq 0 \Leftrightarrow -\mathrm{a}-a^2-8b^2-16b\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+8(b+1)^2\leqq 8 \Leftrightarrow \frac{a^2}{8}+(b+1)^2\leqq 1$$

以上より求める範囲は図の斜線部分境界は全て含む。



(2)　$\dfrac{b+1}{a+4}=k$ とおく。$A(-4,\,-1)$, $P(a,\,b)$とおくと、kはAPの傾きを表す。

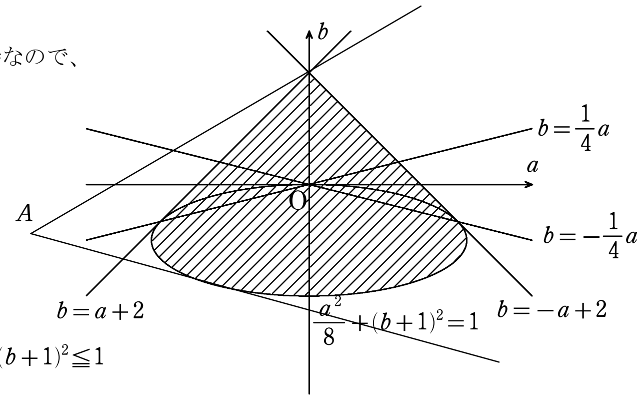
kのとり得る範囲は領域と直線$b+1=k(a+4)$が交わる条件と同値である。

【最大】

kが最大となるのは

直線APが$(0,\,2)$を通る時なので、

$k=\dfrac{2+1}{0+4}=\dfrac{3}{4}$



【最小】

kが最小となるのは

直線APが楕円：$\dfrac{a^2}{8}+(b+1)^2\leqq 1$

$\dfrac{a^2}{8}+(b+1)^2=1$ と$b+1=k(a+4)$を連立すると

$$\frac{a^2}{8}+k^2(a+4)^2=1 \Leftrightarrow a^2+8k^2(a+4)^2=8 \Leftrightarrow (8k^2+1)a^2+64k^2a+128k^2-8=0$$

$$\frac{D}{4}=32^2k^4-(8k^2+1)(128k^2-8)=0$$

$$\Leftrightarrow -128k^2+64k^2+8=0 \Leftrightarrow 64k^2=8 \Leftrightarrow k^2=\frac{1}{8} \Leftrightarrow k=\pm\sqrt{\frac{1}{8}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$k<0$ より $k=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

以上より、$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\leqq\dfrac{b+1}{a+4}\leqq\dfrac{3}{4}$

$\boxed{4}$

Oを原点とするxyz空間内の平面上に平行四辺形ABCDがあり、3点B, C, Dの座標は B$(1, 0, 0)$, C$(0, \sqrt{3}, 0)$, D$(0, 0, d)$ $(d>0)$である。

辺BCの中点をM, CDを5:1に内分する点をN, BNとDMの交点をGとするとき、次の問いに答えよ。問い(1)では$\boxed{}$にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

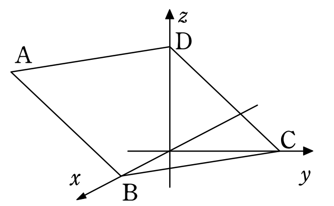
(1) (i) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}$を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\boxed{(ク)}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{(ケ)}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である。

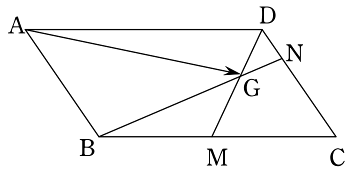
(ii) $\angle\mathrm{DAG}=\dfrac{\pi}{6}$とするとき、点Aの座標は$\left(\boxed{コ}, \boxed{サ}, \boxed{シ}\right)$, dの値は$\boxed{(ス)}$である。

(2) A, dは(1)で求めた座標, 値とする。平行四辺形ABCDを底面とする四角錐 O$-$ABCDをz軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1) (ク,ケ) $\dfrac{2}{7}, \dfrac{6}{7}$ (コ,サ,シ) $1, -\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$ (ス) $3\sqrt{2}$ (2) $7\sqrt{2}\pi$

解説





$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1, \sqrt{3}, 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(0, \sqrt{3}, -d)$

である。また、

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{1+3}=2$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3+d^2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=3$$

である。また、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$=(1, -\sqrt{3}, d)$$

となる。

(1)(i) 三角形DMCと直線BNでメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{GM}}\cdot\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{ND}}=1 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{GM}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{1}=1 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{GM}}=\frac{2}{5}$$

よって、DG:GM$=2:5$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{5}{2+5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{2}{2+5}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)=\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AG'}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}\left(=\dfrac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right)$とおく。

$$|\overrightarrow{\mathrm{AG'}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+6\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+9|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$$
$$=3+d^2+6\cdot3+9\cdot4=d^2+57$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AG'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+3|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=3+3\cdot4=15$$

なので、$\angle\mathrm{DAG}=\angle\mathrm{DAG'}=\dfrac{\pi}{6}$より

$$\overrightarrow{\mathrm{AG'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=|\overrightarrow{\mathrm{AG'}}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 15=\sqrt{d^2+57}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3(d^2+57)}$$

$$\Leftrightarrow 225=3(d^2+57) \Leftrightarrow 75=d^2+57 \Leftrightarrow d^2=18$$

$d>0$より、$d=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ よって、$A(1, -\sqrt{3}, 3\sqrt{2})$

(2) $R(0, 0, Z)$とする。

AB上でz座標がZの点をP,

CD上でz座標がZの点をQとする。

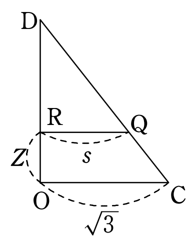
PR$=t$, QR$=s$

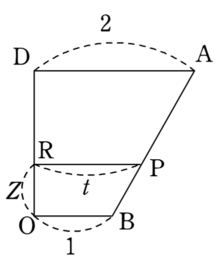
とおく。DR:RQ$=$DO:OSより

$3\sqrt{2}-Z:s=3\sqrt{2}:\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}(3\sqrt{2}-Z)=3\sqrt{2}s$

$\Leftrightarrow s=\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}Z$





ABはODに対して
ねじれの位置にある

$P(X,Y,Z)$とし$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-x)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x(1, -\sqrt{3}, 3\sqrt{2})+(1-x)(1, 0, 0)=(1, -\sqrt{3}x, 3\sqrt{2}x)$$

よって、

$$X=1, Y=-\sqrt{3}x, Z=3\sqrt{2}x \Leftrightarrow x=\frac{1}{3\sqrt{2}}Z \quad ゆえにY=\frac{-1}{\sqrt{6}}Z$$

よってP$\left(1, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}Z, Z\right)$ゆえ $t=\sqrt{1+\dfrac{1}{6}Z^2}$ となる。

ここで、$s=t$を解くと

$$\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{6}}Z=\sqrt{1+\frac{1}{6}Z^2} \Leftrightarrow 3-\sqrt{2}Z+\frac{1}{6}Z^2=1+\frac{1}{6}Z^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}Z=2 \Leftrightarrow Z=\sqrt{2}$$

となる。よって、$0<Z<\sqrt{2}$ のとき$s>t$ で$\sqrt{2}<Z<3\sqrt{2}$ のとき$s<t$ であることに注意すると、求める立体の体積は

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}s^2dZ+\pi\int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}t^2dZ$$

となる。

$$\int_0^{\sqrt{2}}s^2dZ=\int_0^{\sqrt{2}}\left(3-\sqrt{2}Z+\frac{1}{6}Z^2\right)dZ=\left[3Z-\frac{\sqrt{2}}{2}Z^2+\frac{1}{18}Z^3\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{19\sqrt{2}}{9}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}t^2dZ=\int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{6}Z^2\right)dZ=\left[Z+\frac{1}{18}Z^3\right]_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}}=\frac{44\sqrt{2}}{9}$$

よって、

$$V=\frac{19\sqrt{2}}{9}\pi+\frac{44\sqrt{2}}{9}\pi=7\sqrt{2}\pi$$

$\boxed{5}$

【講評】

昨年同様、大問数が4題で出題分野は

$\boxed{1}$ (1) 確率(数学A) (2) 一次変換(数学C)

$\boxed{2}$ 曲線の概計, 面積, 面積の最大 (数学III)

$\boxed{3}$ 領域図ならびに領域における最大最小 (数学II 数学C)

$\boxed{4}$ 空間ベクトルと四角錐の回転体の体積 (数学B 数学III)

である。

計算量と難易度は共に昨年よりUPしていると言える。

$\boxed{1}$の小問をしっかりに解き、グラフと面積というおきまり名問題$\boxed{2}$を攻略し、$\boxed{4}$の(1)を確実に得点するあたりがボーダーかと。

$\boxed{3}$の(1)は「スライムの絵」がかければ勝ちだが$b<0$の時の考察はなかなかやりにくい。

$\boxed{4}$の(2)は空間における直線の回転問題で、よくあると言えばよくあるが、z軸とCDの距離、ABの距離をきちんとはからなければならないのである。

これらは部分点ねらいで、65%あたりが合格のラインと思われる。

解説