2016 年度　福岡大学(医)入試　数学解答速報

Ⅰ

(i)　$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

正の約数のうち，偶数となるものは

$2^k \cdot 3^l \cdot 7^m$ の形

$(1 \leqq k \leqq 5,\ 0 \leqq l \leqq 2,\ 0 \leqq m \leqq 1)$

個数は　$5 \times 3 \times 2 = 30$個

これらの和は

$(2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)(3^0+3^1+3^2)(7^0+7^1)$

$= 62 \times 13 \times 8$

$= 6448$

(ii)　$x^3 + ax + \frac{5}{2} = 0$ ---- ①

3つの解をα, β, γとすると

解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma = 0$ ---- ②

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = a$ --- ③

$\alpha\beta\gamma = -\frac{5}{2}$ --- ④

このとき

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$= 0^2 - 2a$

$= -2a$

次に複素平面上で，3解が三角形をなすので，実数解1個と虚数解2個（共役解）となる。

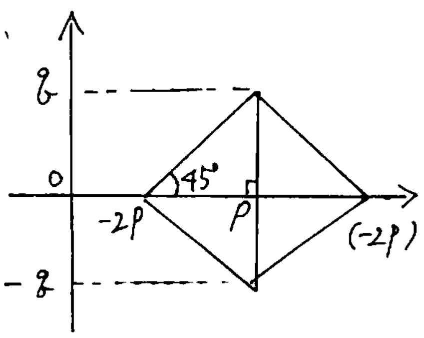
従って，3解を t，$p+qi$，$p-qi$

（t, p, qは実数　$p>0$）とおく。

①より　$t + (p+qi) + (p-qi) = 0$

$t = -2p.$

さらに，その三角形が直角二等辺三角形となるので



$|p-(-2p)| = q$　　$q = \pm 3p$

これから，3解は

$-2p$，$p+3pi$，$p-3pi$

④より　$-2p(p+3pi)(p-3pi) = -\frac{5}{2}$

$10p^3 = \frac{5}{4}$

$p = \frac{1}{2}$

3つの解は　-1，$\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$　となる。

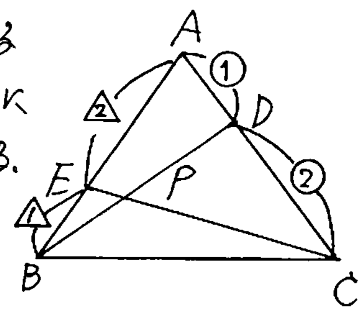
これらを解とする3次方程式は

$(x+1)\{x-(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i)\}\{x-(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i)\} = 0$

$x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = 0$

従って　$a = \frac{3}{2}$

(iii)　ACを1:2に内分する点をD，ABを2:1に内分する点をEとする。



メネラウスの定理から

$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EP}{PC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{EP}{PC} \cdot \frac{2}{1} = 1$

$\frac{EP}{PC} = \frac{1}{6}$

これから

$\overrightarrow{AP} = \frac{6\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}}{7}$

$= \frac{6 \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{7}$

$= \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

次に△ABCが正三角形のとき，

$AB = AC = l$　とおくと，

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = l$，　$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}l^2$

$|\overrightarrow{AP}| = \frac{1}{7}|4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

ここで　$|4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|^2$

$= 16|\overrightarrow{AB}|^2 + 8\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2$

$= 16\ell^2 + 4\ell^2 + \ell^2 = 21\ell^2$

$|\overrightarrow{AP}| = \frac{1}{7}\sqrt{21}\,\ell$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{7}(4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{7}(4|\overrightarrow{AB}|^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{7}(4\ell^2 + \frac{1}{2}\ell^2)$

$= \frac{9}{14}\ell^2$

$\cos\angle PAB = \dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|}$

$= \dfrac{\frac{9}{14}\ell^2}{\frac{\sqrt{21}}{7}\ell\cdot\ell}$

$= \dfrac{9}{2\sqrt{21}} = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

$\boxed{\text{II}}$

(i) $(\frac{1}{2})^{2x} - 6(\frac{1}{2})^{x-1} + 32 \leqq 0$ ----①

$(\frac{1}{2})^x = X$ とおくと $X > 0$ で ①は

$X^2 - 12X + 32 \leqq 0$

$(X-4)(X-8) \leqq 0$

$4 \leqq X \leqq 8$

$2^2 \leqq (\frac{1}{2})^x \leqq 2^3$

$2^2 \leqq 2^{-x} \leqq 2^3$

$\Rightarrow 2 \leqq -x \leqq 3$ だから

$-3 \leqq x \leqq -2$

次に $A = (\frac{1}{24})^{15} = 24^{-15}$ とおくと

$\log_{10} A = -15\log_{10} 24$

$= -15(3\log_{10}2 + \log_{10}3)$

$= -15(3\times 0.3010 + 0.4771)$

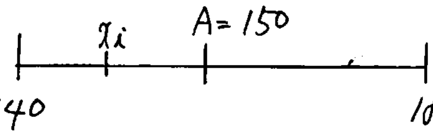
$= -20.7015$

$-21 \leqq \log_{10} A \leqq -20$ だから

小数点第21位に初めて

0以外の数が出現する.

(ii) 人数を $2m$ 人とする.



1番目から m 番目までが 140〜150の間

$m+1$ 番目から $2m$ 番目までが 150〜180の間

$$\begin{cases} 140 \leqq x_i \leqq 150 & (1 \leqq i \leqq m) \\ 150 \leqq x_i \leqq 180 & (m+1 \leqq i \leqq 2m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} 140 \leqq \sum_{i=1}^{m} x_i < \sum_{i=1}^{m} 150 & \text{(m人全員が150cmにはならない)} \\ \sum_{i=m+1}^{2m} 150 < \sum_{i=m+1}^{2m} x_i \leqq \sum_{i=m+1}^{2m} 180 & \text{(m人全員が150cmにはならない)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 140m \leqq \sum_{i=1}^{m} x_i < 150m \\ 150m < \sum_{i=m+1}^{2m} x_i \leqq 180m \end{cases}$$

2式を加えて

$90m < \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{2m} x_i < 330m$

$290m < \sum_{i=1}^{2m} x_i < 330m$

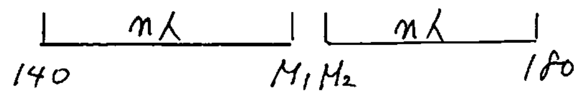
これを $2m$ で割って

$145 < \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{2m} x_i < 165$

従って $145 < \bar{x} < 165$

次に

最初から m 番目の人の身長を M_1, $m+1$ 番目の人の身長を M_2 とする



中央値は $A = \dfrac{M_1 + M_2}{2}$ $(M_1 \leqq M_2)$

前半と同様に

$$\begin{cases} 140 \leqq x_i \leqq M_1 & (1 \leqq i \leqq m) \\ M_2 \leqq x_i \leqq 180 & (m+1 \leqq i \leqq 2m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 140m \leqq \sum_{i=1}^{m} x_i \leqq M_1 m \\ M_2 m \leqq \sum_{i=m+1}^{2m} x_i \leqq 180m \end{cases}$$

2式を加えて

$$(140+M_2)m \le \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{2m} x_i \le (180+M_1)m$$

これを$2m$で割って

$$\frac{140+M_2}{2} \le \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{2m} x_i \le \frac{180+M_1}{2}$$

$\bar{x}=170$ だから

$$\frac{140+M_2}{2} \le 170 \le \frac{180+M_1}{2}$$

$\frac{140+M_2}{2} \le 170$ より　$M_2 \le 200$

最大値が 180 だから $M_2 \le 180$

$\frac{180+M_1}{2} \ge 170$ より　$M_1 \ge 160$

従って，$A=\frac{M_1+M_2}{2} \ge \frac{M_1+M_1}{2}=160$

$A=\frac{M_1+M_2}{2} \le \frac{M_2+M_2}{2} \le 180$

従って　$160 \le A \le 180$

Ⅲ

$f(x)=(x-1)\sqrt{-x^2+4x-3}$　$(1 \le x \le 3)$

(i) $f'(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}+(x-1)\cdot\frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x-3}}$

$$=\frac{-x^2+4x-3+(x-1)(-x+2)}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

$$=\frac{-2x^2+7x-5}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

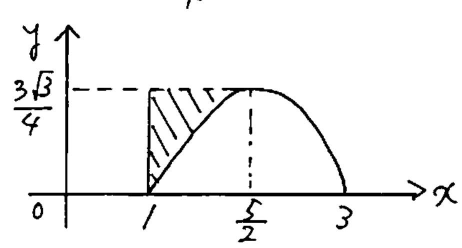
$$=\frac{-(2x-5)(x-1)}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

x	1		$\frac{5}{2}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$x=\frac{5}{2}$ で極大となり，極大値は

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(ii)



求める面積は図の斜線部分

$$S=\frac{3}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}-\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)\sqrt{-x^2+4x-3}\,dx$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{8}-\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)\sqrt{-(x-2)^2+1}\,dx$$

ここで，積分部分をIとして，$x-2=t$とおく

$\frac{dt}{dx}=1 \Longrightarrow dx=dt$

x	$1 \cdots \frac{5}{2}$
t	$-1 \cdots \frac{1}{2}$

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(t+1)\sqrt{-t^2+1}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}t\sqrt{-t^2+1}\,dt+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\sqrt{-t^2+1}\,dt$$

$$I_1=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}t\sqrt{-t^2+1}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(-t^2+1)^{\frac{1}{2}}(-2t)\,dt$$

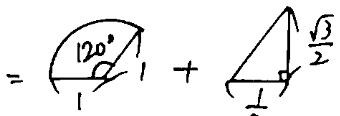
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(-t^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

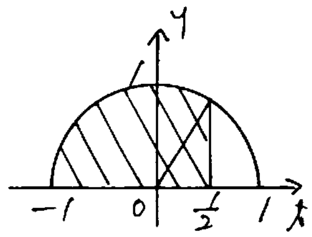
$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$I_2=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\sqrt{-t^2+1}\,dt$$





$$=\frac{\pi\cdot1^2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

従って

$$S=\frac{9\sqrt{3}}{8}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}$$

[講評]

例年通りの出題形式で

$\boxed{\text{I}}$ (i) 約数の個数と約数の和

(ii) 3次方程式の解と係数との関係
複素数平面上で3解で直角
二等辺三角形を作る時の係数の値

(iii) 平面での位置ベクトルと余弦の値

$\boxed{\text{II}}$ (i) 指数不等式と桁数計算

(ii) 平均値と中央値の範囲

$\boxed{\text{III}}$ (i) 極値計算

(ii) 図形の面積

目を引くのは新課程分野の $\boxed{\text{I}}$ (ii)
の複素平面と $\boxed{\text{II}}$ のデータの分析である。
他は基本から標準的な問題が
並ぶので，合格ラインは高く
80% 位と思われる。