Windomの解答 藤田保健衛生大学後期(医)数学

【問題】

1

関数$f(x)=\sin\theta\cos\theta$がある。

(ⅰ) $0<\theta<\frac{\pi}{4}$とする。$f(\theta)=f(2\theta)$となるのは$\theta=$ $\boxed{(1)}$ のときである。

(ⅱ) $0<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{2}$とする。$f(\theta_1)=f(\theta_2)$となるのは、$\theta_1+\theta_2=$ $\boxed{(2)}$ のときである。

(ⅲ) すべての実数θに対して$f(\theta)$の最小値は $\boxed{(3)}$ である。

2

実数xに対して$f(x)=x(|x|-2)$とする。

(ⅰ) 方程式$f(x)=0$の解は$x=$ $\boxed{(4)}$ である。

(ⅱ) $-3\leqq x\leqq a$における関数$f(x)$の最大値が1となるときの定数aの範囲は $\boxed{(5)}$ である。

(ⅲ) 曲線$y=f(x)$の接線で傾きが1である方程式は $\boxed{(6)}$ である。

(ⅳ) (ⅲ)で求めた接線のうちy切片が負のものをlとする。曲線$y=f(x)$とlとy軸で囲まれてできる図形で$x\geqq0$の部分の面積は $\boxed{(7)}$ である。

3

H_1を双曲線$x^2-\frac{y^2}{4}=-1$とし、H_2を双曲線$(x-1)^2-\frac{(y+2)^2}{4}=-1$とする。

(ⅰ) H_2はH_1をx軸正の方向に $\boxed{(8)}$ 、y軸の方向に $\boxed{(9)}$ 平行移動させたものである。

H_2の漸近線の方程式は $\boxed{(10)}$ である。

(ⅱ) H_2と2直線$x=0$, $x=2$で囲まれてできる図形を直線$y=-2$のまわりに1回転させてできる図形の体積は $\boxed{(11)}$ である。

4

$\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$を満たす実数$x(\neq0)$のうちで、絶対値が1に最も近いものは $\boxed{(12)}$ であり、2番目に近いものは $\boxed{(13)}$ である。

5

定数$a_i(i=0,\ 1,\ 2)$, $b_i(i=1,\ 2)$, c_2に対し

$$f_0(x)=a_0,\ f_1(x)=a_1x+b_1,\ f_2(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$$

とし、a_0, a_1, a_2は正とする。また、$f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$は次を満たすとする。

$$\int_{-1}^{1}\{f_0(x)\}^2dx=2,\ \int_{-1}^{1}\{f_1(x)\}^2dx=\frac{2}{3},\ \int_{-1}^{1}\{f_2(x)\}^2dx=\frac{2}{5},$$

$$\int_{-1}^{1}f_0(x)f_1(x)dx=\int_{-1}^{1}f_0(x)f_2(x)dx=\int_{-1}^{1}f_1(x)f_2(x)dx=0$$

このとき各定数を定めて整式$f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$を求めると、

$f_0(x)=$ $\boxed{(14)}$, $f_1(x)=$ $\boxed{(15)}$, $f_2(x)=$ $\boxed{(16)}$ である。

【答】

1

(1) $\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{\pi}{2}$　(3) $-\frac{1}{2}$

2

(4) $0,\ \pm2$　(5) $-1\leqq a\leqq1+\sqrt{2}$　(6) $y=x\pm\frac{9}{4}$　(7) $\frac{9}{8}$

3

(8) 1　(9) -2　(10) $y=2x-4,\ y=-2x$　(11) $\frac{32}{3}\pi$

4

(12) $\frac{5\pi-\sqrt{25\pi^2-36}}{6}$　(13) $\frac{7\pi-\sqrt{49\pi^2-36}}{6}$

5

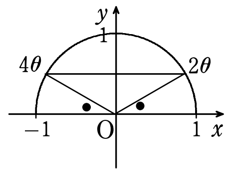
(14) 1　(15) x　(16) $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$

【解説】

1

$f(\theta)=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$

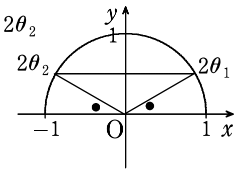
(i) $f(\theta)=f(2\theta)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin2\theta=\frac{1}{2}\sin4\theta\Leftrightarrow\sin2\theta=\sin4\theta$



$0<\theta<\frac{\pi}{4}$より$0<2\theta<\frac{\pi}{2}$, $0<4\theta<\pi$, $2\theta<4\theta$ゆえ

$4\theta=\pi-2\theta\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$

(ii) $f(\theta_1)=f(\theta_2)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin2\theta_1=\frac{1}{2}\sin2\theta_2\Leftrightarrow\sin2\theta_1=\sin2\theta_2$



$0<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{2}$より$0<2\theta_1<2\theta_2<\pi$ゆえ

$2\theta_2=\pi-2\theta_1\Leftrightarrow\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$

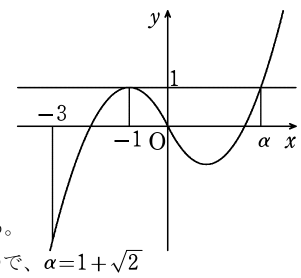
(iii) $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta$と、$-1\leqq\sin2\theta\leqq1$より、$f(\theta)$の最小値$=-\frac{1}{2}$

2

$f(x)=x(|x|-2)$

(i) $f(x)=0\Leftrightarrow x=0,\ |x|=2\Leftrightarrow x=0,\ \pm2$

(ii) $y=f(x)=\begin{cases}x(x-2) & (x\geqq0)\\ -x(x+2) & (x\leqq0)\end{cases}$



より、グラフは右図のようになる。

$-3\leqq x<a$における最大値が1となるaの条件は

$-1\leqq a\leqq\alpha$

であり、αは二次方程式$x(x-2)=1$の大きい方の解である。

$x^2-2a-1=0$の解は解の公式より、$x=1\pm\sqrt{2}$となるので、$\alpha=1+\sqrt{2}$

よって、求める条件は$-1\leqq a\leqq1+\sqrt{2}$

(iii)

[A] $x>0$の時、$f'(x)=\{x^2-2x\}'=2x-2$であり、$f'(x)=2x-2=1$を解くと$x=\frac{3}{2}$となる。$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$より接点の座標は$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$となる。

この点の接線の式は　$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=x-\frac{9}{4}$

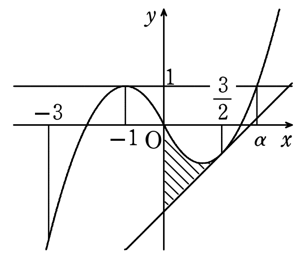
[B] $x<0$の時、$f'(x)=\{-x^2-2x\}'=-2x-2$であり、$f'(x)=-2x-2=1$を解くと$x=-\frac{3}{2}$となる。$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}+3=\frac{3}{4}$より接点の座標は$\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)$となる。

この点の接線の式は　$y=\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=x+\frac{9}{4}$

以上より、求める接線はの式は　$y=x\pm\frac{9}{4}$

(iv) y切片が負の接線は$y=x-\frac{9}{4}$であり、求める面積Sは図の斜線部分の部分の面積である。

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\left\{f(x)-\left(x-\frac{9}{4}\right)\right\}dx$$



$$=\int_0^{\frac{3}{2}}\left\{x^2-2x-\left(x-\frac{9}{4}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}\left\{x^2-2x-\left(x-\frac{9}{4}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx=\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\left\{0^3-\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right\}=\frac{9}{8}$$

3

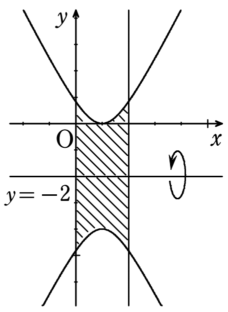
$H_1: x^2-\frac{y^2}{4}=-1 \cdots ①$ $\qquad$ $H_x: (x-1)^2-\frac{(y+2)^2}{4}=-1 \cdots ②$

(i) ①の中心は$(0,0)$で, ②の中心は$(1,-2)$である。中心の移動を考えると、H_2はH_1をx軸の正の方向に1, y軸の正の方向に-2 平行移動したものである。

H_2の漸近線は

$$(x-1)^2-\frac{(y+2)^2}{4}=0 \Leftrightarrow (y+2)^2=4(x-1)^2 \Leftrightarrow y+2=\pm2(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-4 \\ y=-2x \end{cases}$$

(ii) 求める立体は図の斜線部分を$y=-2$の周りに回転してできる立体の体積である。これはH_1と$x=-1$, $x=1$ で囲まれた図形をx軸の周りに回転してできる立体の体積と等しい。



$$V=\pi\int_{-1}^{1} y^2dx=\pi\int_{-1}^{1}4(x^2+1)dx$$

$$=8\pi\int_0^1(x^2+1)dx=8\pi\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=8\pi\cdot\frac{4}{3}=\frac{32}{3}\pi$$

4

$\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$より、$x+\frac{1}{x}=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi$ (m :整数) $\cdots ①$ となる。

xは実数なので、$k_m=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi$とおくと

$$x+\frac{1}{x}=k_m \Leftrightarrow x^2-k_mx+1=0 \cdots ②$$

は実数解を持つので判別式をDとすると、

$$D=k_m{}^2-4=(k_m+2)(k_m-2)\geqq0 \Leftrightarrow k_m\leqq-2,\ 2\leqq k_m \cdots ③$$

を満たす。①の$m=0$の時の解$\pm\frac{\pi}{3}$は②の条件を満たさないので、

$$k_m=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi \ (m:0\text{以外の整数})$$

を考えれば良い。この時の②の実数解をα_m, β_m $(\alpha_m\leqq\beta_m)$とする。

[A] $k_m<0$の時。即ち、$k_m=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi$ $(m=-1,-2,-3,\cdots)$の時。

解と係数の関係：$\begin{cases}\alpha_m+\beta_m=k_m<0\\ \alpha_m\beta_m=1>0\end{cases}$ よりα_mとβ_mは共の負である。

[B] $k_m>0$の時。即ち、$k_m=\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi$ $(m=1,2,3,\cdots)$の時。

解と係数の関係：$\begin{cases}\alpha_m+\beta_m=k_m>0\\ \alpha_m\beta_m=1>0\end{cases}$ よりα_mとβ_mは共の正である。

[B]の時、$f(x)=x^2-k_mx+1$とおくと、$f'(x)=2x-k_m=0$を解くと、軸は$x=\frac{k_m}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+m\pi$ $(m=1,2,3,\cdots)$であり、

$$x=\frac{k_m}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+m\pi\geqq-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5}{6}\pi>\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$$

なので、α_mとβ_mだとα_mの方が1に近く、$f(0)=1>0$と

$$f(1)=2-k_m=2-\left(\pm\frac{\pi}{3}+2m\pi\right)\leqq2-\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=2-\frac{5}{3}\pi<2-\frac{5}{3}\cdot3=-3<0$$

であるから、$0<\alpha_m<1$ となるので、$k_m<0$の時のα_mとβ_mと比べても、1に近いことがわかる。

また、$y=f(x)$はmの値によらず形は$y=x^2$と同じでk_m が大きいほど、軸はx軸の正の方向にずれ、mの値に依らず$f(0)=1$であることに注意すると、k_mが大きくなるほどα_mは小さくなる。

よって、1に最も近いのは$k_m=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{5}{3}\pi$の時の②の実数解の小さい方で

$$x^2-\frac{5}{3}\pi x+1=0 \Leftrightarrow 3x^2-5\pi x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pi\pm\sqrt{25\pi^2-36}}{6}$$

より、$x=\frac{5\pi-\sqrt{25\pi^2-36}}{6}$

また、1に2番目に近いのは$k_m=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{7}{3}\pi$の時の②の実数解の小さい方で

$$x^2-\frac{7}{3}\pi x+1=0 \Leftrightarrow 3x^2-7\pi x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pi\pm\sqrt{49\pi^2-36}}{6}$$

より、$x=\frac{7\pi-\sqrt{49\pi^2-36}}{6}$

5

『$f_0(x)$について』

$$\int_{-1}^{1}\{f_0(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}a_0{}^2dx=2a_0{}^2\int_0^1dx=2a_0{}^2\Big[x\Big]_0^1=2a_0{}^2$$

ゆえ、$2a_0{}^2=2 \Leftrightarrow a_0{}^2=1$ $a_0>0$より、$a_0=1$ なので、$f_0(x)=1$

『$f_1(x)$について』

$$\int_{-1}^{1}\{f_1(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(a_1x+b_1)^2dx=\int_{-1}^{1}(a_1{}^2x^2+2a_1b_1x+b_1{}^2)dx$$

$$=2\int_0^1(a_1{}^2x^2+b_1{}^2)dx=2\left[\frac{a_1{}^2}{3}x^3+b_1{}^2x\right]_0^1=\frac{2}{3}a_1{}^2+2b_1{}^2$$

ゆえ、$\frac{2}{3}a_1{}^2+2b_1{}^2=\frac{2}{3} \Leftrightarrow a_1{}^2+3b_1{}^2=1\cdots①$

$f_0(x)=1$に注意すると、

$$\int_{-1}^{1}f_0(x)f_1(x)dx=\int_{-1}^{1}(a_1x+b_1)dx=2b_1\int_0^1dx=b_1\Big[x\Big]_0^1=b_1$$

ゆえ、$b_1=0$ となる。これを①に代入すると$a_1{}^2=1$となる。

$a_1>0$より、$a_1=1$ なので、$f_1(x)=x$

『$f_2(x)$について』

$$\int_{-1}^{1}\{f_2(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(a_2x^2+b_2x+c_2)^2dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\{a_2{}^2x^4+2a_2b_2x^3+(b_2{}^2+2a_2c_2)x^2+2b_2c_2x+c_2{}^2\}dx$$

$$=2\int_0^1\{a_2{}^2x^4+(b_2{}^2+2a_2c_2)x^2+c_2{}^2\}dx$$

$$=2\left[\frac{a_2{}^2}{5}x^5+\frac{b_2{}^2+2a_2c_2}{3}x^3+c_2{}^2x\right]_0^1=\frac{2}{5}a_2{}^2+\frac{2}{3}(b_2{}^2+2a_2c_2)+2c_2{}^2$$

ゆえに、$\frac{2}{5}a_2{}^2+\frac{2}{3}(b_2{}^2+2a_2c_2)+2c_2{}^2=\frac{2}{5}$

$$a_2{}^2+\frac{5}{3}(b_2{}^2+2a_2c_2)+5c_2{}^2=1\cdots②$$

$f_0(x)=1$に注意すると、

$$\int_{-1}^{1}f_0(x)f_2(x)dx=\int_{-1}^{1}(a_2x^2+b_2x+c_2)dx=2\int_0^1(a_2x^2+c_2)dx$$

$$=2\left[\frac{a_2}{3}x^3+c_2x\right]_0^1=2\left(\frac{a_2}{3}+c_2\right)=0 \text{ より、} c_2=-\frac{a_2}{3}\cdots③$$

$f_1(x)=x$に注意すると、

$$\int_{-1}^{1}f_1(x)f_2(x)dx=\int_{-1}^{1}(a_2x^3+b_2x^2+c_2x)dx=2b_2\int_0^1x^2dx$$

$$=\frac{2b_2}{3}\Big[x^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}b_2=0 \text{ より、} b_2=0\cdots④$$

③と④を②に代入して、

$$a_2{}^2+\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}a_2{}^2\right)+5\left(-\frac{2}{3}a_2\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{4}{9}a_2{}^2=1 \Leftrightarrow a_2{}^2=\frac{9}{4}$$

$a_2>0$より、$a_2=\frac{3}{2}$となる。③に代入して、$c_2=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$となる。

よって、$f_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$

総評

物理系＆数理モデルの問題がなかったので、学力があればきちんと攻略できる入試問題であった。

4以外の問題を完答するのが目標。